This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06273100 9

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling A.

Tredje Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1892.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
83284
1897.
THE ASTOR LIBRARY NY

Indhold.

Side

N. B.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærerinde-Eksamen 77, 118
A. S. Bang, cand. mag.
Opgave til Løsning Nr. 146.
Magnus Berg, Lærer, Framnes.
Løsninger af Opgaver til Skolelærereksamen i Norge 136
Løste Opgaver Nr. 129—30, 146.
B—x.
Opgaver til Løsning Nr. 117—18.
T. Bonnesen, stud. mag.
Opgave til Løsning Nr. 151.
J. Byskov, Seminarielærer, Gjedved.
Løsninger af Opgaverne til Skolelærereksamen 72
Løste Opgaver Nr. 110, 114.
J. C. Carlsen, Matematiklærer.
Løste Opgaver Nr. 111, 113, 115, 120, 122, 126—40, 142.
J. P. Gram, Dr. phil., Direktør.
Til Lærebogsspørgsmaalet 46
Opgave til Løsning Nr. 149.
Chr. Hansen, Rektor, Hjørring.
En simpel og korrekt Definition 56
Begrebet »geometrisk Sted« 121
Opgaver til Løsning Nr. 114—16.
P. H.
Løste Opgaver Nr. 110, 112, 114, 116—19, 121, 123—25, 141, 143.
P. Heegaard, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 110—113.
H. S. Hermansen, stud. polyt.
Løste Opgaver Nr. 126, 129—30, 133.
P. V. Jensen, cand. polyt., Maler.
Om Roduddragning 113
C. Juel, Dr. phil.
Litteratur-Anmeldelse 145
P. A. Larsen, stud. mag.
Opgaver til Løsning Nr. 119—22.

Side

H. S. Nielsen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 126, 128, 131, 143, 146.
H. Olsen, stud. mag.
Løste Opgaver Nr. 68, 141, 146.
Kr. Pedersen, Overlærer ved Tøxens Skole, Køge.
Løste Opgaver Nr. 126, 128—30, 133.
Ludvig Petersen, Adjunkt, Horsens.
Opgave til Løsning Nr. 152.
Julius Petersen, Dr. phil., Prof. ved Universitetet.
Bemærkning til »To officielle Skrivelser« 41
A. Rump, stud. art.
Opgave til Løsning Nr. 150.
E. Schou, stud. polyt.
Løst Opgave Nr. 117.
O. A. Smith, Lærer.
Løste Opgaver Nr. 41, 116.
To officielle Skrivelser 1
x.
Løste Opgaver Nr. 106—7.
H. G. Zeuthen, Dr. phil., Prof. ved Universitetet.
Om Konstruktionen som Eksistensbevis i den gamle græske Matematik 105
Asted, Adjunkt, Rønne.
Opgaver til Løsning Nr. 126—44, 147—48.

Opgaver til Løsning.

Nr. 110—25 38
- 126—44 62
- 145—46 120
- 147—50 144
- 151—55 159

Løste Opgaver.

Nr. 41, 106—7 36
- 110, 112, 114, 116, 119, 121, 123, 125 58
- 111, 113, 115, 120, 122 77
- 126—40, 142 96
- 68, 141, 117 137
- 118, 124, 143, 146. 157

Danske Eksamensopgaver.

Landbohøjskolens Eksamen (Oktober 1891) 31
Almindelig Forberedelseseksamen (Januar 1892) 33
— — (Marts —) 53
— — (Juni —) 90
— — (Oktober —) 128

	Side
Skolelærereksamen	72
Ekstraordinær Skolelærereksamen	133
Skolelærerinde-Eksamen	118
Ekstraordinær Skolelærerinde Eksamen	77
Adgangseksamen til polyteknisk Læreanstalt	81
Afgangseksamen for studerende	85
Adgangsprøven til Søofficersskolen	94

Norske Eksamensopgaver.

Skolelærereksamen (Juni 1892) 136

Svenske Eksamensopgaver.

Mogenhetsexamen (vårterminen 1892) 65
— (höstterminen 1892) 149

Litteratur Anmeldelser.

Opgaver i rén Matematik af Niels Nielsen 145

Korrespondance 80

Rettelser og Tilføjelser 160

To officielle Skrivelser. *)

A. Skrivelse af 11. Maj 1891 fra Prof. Julius Petersen
til
Ministeriet for Kirke- og Undervisningvæsenet.

Det høje Ministerium har affordret mig min Mening om, hvorvidt det bør tillades, at en nylig udkommen Lærebog i Plangeometri af D'Hr. Knud Christensen og Karl Schmidt og en i Algebra af D'Hr. S. A. Christensen og Karl Schmidt benyttes ved Undervisningen i Odense Kathedralskole. Jeg skal i den Anledning ærbødigst udtale, at det er min faste Overbevisning, at en saadan Tilladelse ikke bør gives. Det er mig meget ubehageligt at maatte udtale en saadan Dom, da jeg selv er Forfatter af tilsvarende Lærebøger. Jeg vil derfor afgive en udførlig Motivering, og denne vil sikkert ikke efterlade nogen Tvivl om, at jeg ikke har kunnet dømme anderledes.

Plangeometrien. Allerede i § 1 begynde Forf. med at benytte et ikke defineret Begreb »Retning«. De tale om, at en Retning kan sammensættes af tre andre. Udtrykket er fuldstændigt uforstaaeligt for Elever, og den, der forstaar det, véd, at den deri liggende Sætning kun kan bevises ved Hjælp af adskillige stereometriske Sætninger. De følgende meningsløse Bemærkninger om et Legemes Hovedudstrækninger findes desværre i mange Lærebøger.

---

*) Tilladelse til Offentliggjørelse meddelt under 10. November 1891.

I 2 siges: En Flade er en af Grænserne mellem to Legemer. Jeg kender ikke Grænser mellem to Legemer, som ikke ere Flader. Den samme Meningsløshed kommer flere Gange.

5. indeholder falske Definitioner af Skæring og Røring.

7. »Et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvis Punkter alle opfylde en given Betingelse«. Sætningens Form er upædagogisk, men værre er det, at Definitionen er falsk, Stedet skal indeholde alle de Punkter o. s. v. Fejlen er ikke tilfældig, thi hvor der senere nævnes geometriske Steder, mangler den ene Halvdel af Beviset (43 og 68).

8. Definitionen paa »Vinkel« er meningsløs.

9. Definitionen af »Vinkelgrad« er ubrugelig, da den ikke viser, at Vinkler med samme Gradeantal ere lige store.

15—19. Det er særlig dette Afsnit, der gør Bogen ubrugelig. Det er meget vigtigt, da det danner Hovedgrundlaget for det følgende, men det indeholder kun falske Definitioner og Beviser. Der siges, at en Linie er parallel med en anden, naar den kan bringes hen paa den ved Forskydning uden Drejning. Forfatterne se ikke, at dette Begreb »Forskydning uden Drejning« netop forudsætter Parallelbegrebet og derfor ikke kan bruges som Definition for dette. Sagen bliver ikke bedre ved Omformningen: To Linier kaldes parallele, naar de have samme Retning, thi at to Linier have samme Retning kan kun defineres ved, at de ere parallele. De følgende Beviser støtte sig til den angivne Definition og ere derfor alle falske; de behøve imidlertid ikke denne Grund til at være det, da hver af dem desuden har sine specielle falske Slutninger. F. Ex. 18: »Naar to Linier overskæres af en tredje.... Linier parallele«. Beviset føres ved, at den ene Linie »uden at forandre Stilling til Skæringslinien« og uden at være drejet skydes op paa den anden. Der forudsættes altsaa, at en Linie kan forskydes, saa at dens Vinkler ved Skæringslinien ikke forandres og derved stadig være parallel med den oprindelige Stilling, men det er netop den Sætning, der skal bevises.

Alle disse Blomster ere plukkede lige ved Indgangen til

Haven for at vise dens Frodighed; jeg tror derfor, at jeg nu kan nøjes med at tage nogle enkelte hist og her.

37. Sætningen er jadsket affattet; man kan ikke andet end slutte af den, at to Trekanter, som have . . . . lige store, og den modstaaende Side mindre en den hosliggende, ikke kunne være kongruente.

40. Her fortælles, at en Figur kan konstrueres, naar dens bestemmende Stykker ere givne, uagtet man ifølge 12 kun maa benytte Passer og Lineal.

51. »Afstand« mellem Paralleler er ikke defineret.

Sætning 2 udledes af 51 men kan i Virkeligheden først umiddelbart udledes af en følgende Sætning o. s. v. o. s. v.

Efter at Forfatterne paa de 15 første Sider saaledes have lagt et Grundlag, hvis Lige i løs Tankegang næppe findes i nogen tidligere dansk Geometri, slutte de sig i det følgende til min Bog med en høj Grad af Frimodighed. Hele Anordningen af Stoffet, Beviserne, Fordelingen og Arten af Opgaverne ere med uvæsentlige Forandringer som i min Bog (deriblandt mange af mine originale Beviser og Bemærkninger). De finde dog rigelig Lejlighed til at ødelægge en hel Del af Beviserne med deres Forbedringer. Saaledes ved Bestemmelsen af Cirkelperiferiens Længde: Bogen begynder meget godt, men saa mene Forfatterne at kunne skyde en Gjenvej, og det lykkes dem derved at gjøre hele Fremstillingen meningsløs; med deres uklare Opfattelse kunne de ikke se, at det, at en omskreven Polygon nærmer sig i Beliggenhed til en Cirkelperiferi ikke er det samme som, at deres Længder nærme sig til hinanden.

Algebraen. Denne Bog er et passende Sidestykke til Geometrien. Den Frimodighed, hvormed min Bog er benyttet, er om muligt endnu større end ved Geometrien, og Forbedringerne ere af en ligesaa ødelæggende Natur. Forfatterne begynde med en falsk Definition af Begrebet Størrelse (efter den vilde f. Ex. Kærlighed og Had blive Størrelser), følge derpaa min Indledningsmaade, men slaa pludselig over i en anden (anvendt af ... ıt se, at denne Sammenblanding

maa føre ind i et Virvar. De burde have set dette allerede ved deres første Bevis (4) men klare Vanskeligheden ved uden videre at udelade nogle Parenteser, som de selv et Par Linier iforvejen have vist Nødvendigheden af. Indførelsen af negative Tal, der med stor Omhyggelighed maa lægges til Rette for at blive forstaaelig for Eleverne (jeg bruger ca. 4 Sider), ekspederes paa et Par Linier, men Resultatet er ogsaa derefter. Skal man trække 9 fra 7, kan, hvad enten man følger den ene eller den anden af Forfatterne to sammenblandede Veje, Svaret kun blive, at Opgaven er umulig. Forfatterne sige imidlertid uden videre »dette Tal kaldes — 2«, uden at bryde sig om, at Tallet efter deres egne Forklaringer ikke eksisterer. At adskillige andre Forfattere gaa lige saa løst til Værks kan ikke tjene som Undskyldning; naar Forfatterne afskrive meningsløse Udviklinger, maa de selv tage Ansvaret for dem.

Beviset for at Ordenen af Leddene i en flerledet Størrelse kan ombyttes, føres saaledes (14): »Ved at overveje, hvilke Tælninger frem eller tilbage i Talrækken, der skulle foretages som Følge af de i nedenstaaende flerledede Størrelser indeholdte Led, vil man — især bekvemt ved at foretage Tælningerne langs en Tommestok — overbevise sig om, at man maa have . . . .« og saa følger nogle Formler som

$a + b - c = a - c + b$, $a - (b - c) = a - b + c$ og lign.

Jeg ved ikke, om jeg her mest undrer mig over Forfatternes Forestilling om, hvorledes et mathematisk Bevis ser ud eller over deres Mangel paa pædagogisk Sands.

Forfatternes Mangel paa klar Opfattelse viser sig stadig, saaledes indføres i 27 Betegnelsen $\frac{a}{b}$ med een Betydning, uagtet den tidligere er indført med en anden Betydning ($a \cdot \frac{1}{b}$); i 29 gives et »selvfølgelig« istedetfor et Bevis; i Beviset Pag. 30 øverst er der Spring i Tankegangen, hvad der omhyggelig bør undgaaes ved et Bevis som dette, der altid falder vanskeligt for Eleverne.

Afsnittet om Tals Delelighed danner et Sid[illegible] [illegible]il

Geometriens Paralleltheori, idet de fleste Beviser ere falske. Sagen er den, at Forf. mangle den Sætning, at et Primtal, der gaar op i et Produkt, maa gaa op i en af Faktorerne (eller lignende), og uden den kan man ingen Veje komme. Dette er en saa vel bekendt Ting, at jeg ikke skal opholde mig videre derved.

Der gives saaledes en Mængde positive Fejl af den alvorligste Art, men desuden er Fremstillingen tidt jadsket. Saaledes er Paastanden øverst Side 34 kun rigtig, naar k er et Primtal, i 43 burde fremhæves, at Ligningen er en Identitet (den vigtige Forskel mellem identiske og ikke identiske Ligninger er i det hele taget slet ikke omtalt); 45,3 er vildledende, idet Eleven maa faa den Forestilling, at der kun gives Ligninger af første Grad; Betingelsen 1, i 46 sidste Stykke er gal, Beviset i 54 er falsk paa Grund af den ovenfor manglende Sætning, Definitionen af Proportionen er urigtig, Beviset for at Proportionernes Rigtighed prøves ved o. s. v. (57) er ufuldstændigt; Beviset i sidste Linie af 71 indeholder en grov logisk Fejl o. s. v. o. s. v.

Jeg tror, at det anførte er tilstrækkeligt til at vise, at de to Bøger langt fra tilfredsstille de Krav, som maa stilles til Undervisningsmidler i et Fag som Mathematik. Naar vi ville udvikle Elevernes Evne til at gjøre rigtige Slutninger, er det næppe heldigt at give dem Bøger ihænde, der jævnlig synde grovt imod Logikken; naar vi ville vænne dem til at udtrykke deres Tanker skarpt og nøjagtigt, er det næppe heldigt at give dem Bøger, der jævnlig have falske, ufuldstændige eller løst formulerede Definitioner.

Om man tager nogle Sætninger mere eller mindre med, har mindre Betydning, naar Sætningerne ikke ere nødvendige Led af Systemet; om Beviserne ere noget kortfattede er ogsaa mindre væsenligt, ja kan endogsaa, naar Grænserne ere dragne med passende Hensyn til Elevernes Udvikling, være pædagogisk rigtigt, idet Selvvirksomheden derved fremmes; men hvad der under ingen Omstændigheder kan forsvares, det er Opstilling

af falske Beviser. Der er intet mere ødelæggende for en begavet Drengs Udvikling end det, at han skal tvinges til at tro paa Rigtigheden af et Bevis, som han dog føler, at han ikke kan forstaa, og man maa ikke tro, at saadanne Elever ere sjeldne Undtagelser; Erfaringen har vist mig, at den logiske Sands tidt kan være stærkt udviklet forbavsende tidligt.

Jeg skal til Slutning ærbødigst anmode om, at denne Motivering af min Indstilling maa blive sendt til Odense Kathedralskole, for at Forf. kunne blive bekendte med den; uden dette ville de sikkerst anse sig for forurettede; jeg kan imidlertid ikke tro andet, end at den her givne Paavisning af nogle af Manglerne ved deres Bøger maa være tilstrækkelig til at bringe dem til at indse, at de have sigtet mod et Maal, der ligger højt over deres Kræfter.

Allerærbødigst
Julius Petersen.

København den 11. Maj 1891.

B. Skrivelse af 9. Juli 1891 fra Overlærer Karl Schmidt og cand. mag. S. A. Christensen til Odense Kathedralskoles Rektor, videre tilsendt Ministeriet for Kirke- og Undervisningsvæsenet.

Med behagelig Skrivelse af 20. d. M. har Hr. Rektoren oversendt medundertegnede Schmidt som en af dem, der have udarbejdet et Par elementære matematiske Lærebøger, der af Hr. Rektoren vare indstillede til Ministeriet for Kirke- og Undervisningsvæsenet til Brug ved Undervisningen i Odense Kathedralskole, den Meddelelse, at den saaledes begærede Tilladelse ikke var bleven givet, en Meddelelse, der unægtelig af den Grund er kommet alle os tre Forfattere noget uv[illegible]
at vi i de faa Uger, Bøgerne have vær[illegible] [illegible]r

alene have modtaget anerkendende og opmuntrende Udtalelser om dem fra mange forskellige Sider, men tillige have erfaret, at de straks ere blevne indførte til Brug i flere Skoler og ville blive indførte i endnu flere. Den omtalte Meddelelse var ledsaget af den Skrivelse fra Hr. Undervisningsinspektør Prof. J. Petersen til Ministeriet, som har foranlediget, at Tilladelsen blev nægtet, en Skrivelse som Hr. Professoren har ønsket os undertegnede kommuniceret, for at vi af den kunde bringes til at erkende, dels at vi ikke ere blevne forurettede, dels at et Arbejde som det, vi have paataget os, ligger langt over vore Kræfter, hvilket alt motiveres ved en lang Række af Udsættelser. Da den omhandlede Skrivelse dog imidlertid ikke har ført til det saaledes forventede Resultat, saa tillade vi os i al Ærbødighed at anmode om at maatte fremsætte nogle Betragtninger over de os meddelte Ankeposter for derved at faa Lejlighed til at meddele, hvorfor vi ere komne til et andet Resultat end Prof. Petersen.

I. Plangeometrien.

Professor Petersen skriver:

Allerede i § 1 begynde Forf. med at benytte et ikke defineret Begreb »Retning«. De tale om, at en Retning kan sammensættes af tre andre. Udtrykket er fuldstændig uforstaaeligt for Elever, og den, der forstaar det, véd, at den deri liggende Sætning kun kan bevises ved Hjælp af adskillige stereometriske Sætninger. De følgende meningsløse Bemærkninger om et Lege-

1. a. Vi have skrevet: »Det os omgivende ubegrænsede Rum har Udstrækning i uendelig mange Retninger, hvilket viser sig derved, at man fra et bestemt Punkt deri kan slaa ind paa uendelig mange forskellige Veje« og bemærke i Anledning af Klagen herover, at det altid har været anset for fuldt tilladeligt i en Bogs allerførste Punktum at fremsætte en Forklaring som rent foreløbig, saa længe de Begreber, der skulle ligge til Grund for den, og som netop

mes Hovedudstrækninger findes desværre i mange Lærebøger.

udgøre en Del af Genstandene for den paagældende Bogs Undersøgelser, endnu ikke ere udviklede. Dette i Forbindelse med, at vi i vor § 4 bestemme Begrebet Retning ved den rette Linie, gør os Klagen paafaldende; men rent ud mærkværdig bliver den for os, naar vi se den rettet imod os af Prof. Petersen som i sin Bogs § 2 udtaler sig saaledes: »enhver Genstand udfylder et Rum, der har Udstrækning i alle Retninger«, uden i mindste Maade hverken paa dette Sted eller, saavidt vi have kunnet se det, senere at give Forklaring paa, hvad dermed menes.

b. Hvad det vil sige, at en Retning kan sammensættes af tre andre, ere vi enige med Prof. Petersen om, at ingen Elev vil kunne forstaa af sig selv; det maa derfor hans Lærer forklare ham. Vi have Erfaring for, at Sagen forstaas overmaade let ved ganske simple Paavisninger, der jo gerne kunne siges at være af stereometrisk Art, hvad dog neppe kan være nogen Anke, eftersom et indledende stereometrisk Kursus endog er bleven paabudt ved kgl. Anordning, c. Legemernes tre Hovedudstrækninger frembyde sig ganske naturligt for Betragtningen. Klagepostene b og c synes os at angaa Smaating og derfor ikke at have megen Vægt i en Klage, hvis Hovedsum gaar ud paa Kassation af vor Bog.

I 2 siges: En Flade er en af Grænsene mellem to Legemer. Jeg kender ikke Grænser mellem to Legemer, som ikke ere Flader. Den samme Meningsløshed kommer flere Gange.

2. Vi bringe i Erindring, at Terningen begrænses af 6 Flader, Cylinderen af 3, Halvkuglen af 2 o. s v., ligesom at man taler om et Lands Grænse mod Nord og Syd o. s. v.; der forekommer os derfor at være god Mening i at tale om, at en Flade er en af Grænserne o. s. v. (og analogt for Linie og Punkt), især da der til Supplering udtrykkelig udtales, at et Legemes hele Grænse kaldes dets Overflade. Den sædvanlige Forklaring paa Flader

mellem Legemet og det omgivende Rum misforstaaes meget almindeligt, som om Legemet kun er begrænset af een Flade. Klagen forekommer os lidet betydende.

5 indeholder falske Definitioner af Skæring og Røring.

3. Imod Definitionen paa Skæring ses der ikke at være Anledning til Indvending: at den tager Sigte paa Forlængelse er vel ikke sædvanligt men derfor ikke urigtigt og af Skolehensyn ret praktisk; i saa Henseende smlgn. Schlömilch Handb. d. Mathematik 1879 I. Pag. 175. Med Hensyn til den anden Definition bemærkes, at den har faaet sin Form med velberaad Hu og med fuld Bevidsthed om, at den ikke kan staa videnskabelig Prøve. Definitionen er at betrage som rent foreløbig, saaledes som en Definition med fuld Berettigelse kan gives paa et lavere Standpunkt; da den fuldkommen korrekte Forestilling indeholdes i § 57, kunde Definitionen gerne have været udeladt men er medtaget som ret praktisk og formentlig aldeles tilstrækkelig for dem, der aldrig naa ud over Forberedelseseksamens rent elementære Standpunkt, for hvilke Bogen er bestemt; smlgn. Jorden er en Kugle, Himlen drejer sig rundt for dem, der ikke lære Astronomi. Al Erkendelse sker jo trin- og stykkevis; man maa derfor finde sig i at faa en mer eller mindre udtømmende Forklaring alt efter det Standpunkt, man bliver staaende paa.

7. »Et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvis Punkter alle opfylde en given Betingelse.

Sætningens Form er upædagogisk, men værre er det, at Definitionen er falsk, Stedet skal indeholde alle de Punkter o.s.v. Fejlen er ikke tilfældig, hvor der senere nævnes ometriske Steder,

4 a. Det indrømmes, at Formen kunde have været bedre. b. Eftersom en Definition ikke er falsk, fordi den ikke er udtømmende, er Paastanden »Definitionen er falsk« sikkerlig ikke rigtig. c. Berettigelsen til at udelade den Restriktion, der udtømmer Definitionen, have vi ment at finde i, at bægge Halvdele af det vedkommende Bevis —

mangler den ene Halvdel af Beviset (43 og 68).

efter en Sædvane, som er hjemlet ved Prof. Petersens egen Geometri — ikke tages med ved alle de geometriske Steder, der pleje at komme paa Omtale i det her omhandlede Kursus. Saaledes skriver Prof. Petersen i sine 6 første Udgaver (§ 64), at naar et Punkt har samme Afstand fra en Vinkels Ben, saa ligger det i Vinklens Halverings-linie, og deraf udleder han det geometriske Sted for Punkter, der have samme Afstand fra to givne Linier; her mangler altsaa den anden Halvdel af Beviset, at ethvert Punkt i Vinklens Halveringslinie har samme Afstand fra Vinklens Ben. Os er det forekommet heldigere at udlede Stedet af den her sidst-nævnte Halvdel (§ 43, som er den ene af de paaankede) men saa udelade vi til Gengæld den først nævnte. Nu ere vi ganske vist blevne gjorte opmærksomme paa, at Prof. Petersens i 1890 udkomne 7. Udgave af Geometrien indeholder bægge Halvdele (som Opgaver) og at Stedet saa udledes af dem, men lige forunderligt bliver det dog derfor, at der føres Anke mod os over, at vi ikke ere gaaede videre (i vor § 43) end den Bog, som vel maa anses som Norm for Omfanget af, hvad der bør tages med, i alle dens mange tidligere Udgaver. Endnu mærkeligere forekommer os Klagen over vor § 68, eftersom den samme Halvdel, som mangler i Beviset i den, netop ogsaa mangler i det tilsvarende Bevis hos Prof. Petersen i alle Udgaver (§ 65) men ganske vist hos os bægge kan udledes af fore-gaaende Paragrafer. Da vi saaledes ikke se rettere, end at vort, i det mindste i det sidste Tilfælde, er akkurat lige saa godt som Prof. Petersens, saa mene vi at have god Føje til at sige, at Klagen forekommer os mærkelig, navnlig naar henses til, at den skal være medbestemmende til en Kassation af vor Bog.

8. Definition af »Vinkel« er meningsløs.

5. Vi have i 8 oplyst, hvorledes to rette Linier, som udgaa fra samme Punkt, k[illegible] afvige fra hinanden i Retning, og Afvig[illegible] vi

Benævnelsen Vinkel. Nu er det vor og mangfoldige andre Læreres Erfaring, at der hos et Barn frembringes en tydeligere Anskuelse af Sagen, naar der først siges, at en Vinkel imellem to Linier er Afvigelsen mellem deres Retninger og derefter, saaledes som vi gøre det, at dens Størrelse bestemmes ved Størrelsen af den Drejning, den ene Linie maa gøre for at komme til at dække den anden, end naar der — som hos Prof. Petersen — alene siges, at Vinklen mellem to Linier er den Del af en Omdrejning, som o. s. v. Da Forskellen paa bægge Definitioner reelt er uden Betydning, anse vi Klagen for fuldkommen betydningsløs.

9. Definitionen af »Vinkelgrad er ubrugelig, da den ikke viser, at Vinkler med samme Gradeantal ere lige store.

6. Eftersom der paa enhver Maade er om Punkt A angivet, at det er vilkaarligt, (smlgn ogsaa § 11) have hverken vi eller andre mathematikkyndige Mænd, hvilke vi have raadspurgt, kunnet finde nogen som helst Anledning til Klagen, som saaledes vel i ethvert Tilfælde maa anses for at være uden videre Betydning.

15—19. Det er særlig dette Afsnit, der gør Bogen ubrugelig. Det er meget vigtigt, da det danner Hovedgrundlaget for det følgende, men det indeholder kun falske Definitioner og Beviser. Der siges, at en Linie er parallel med en anden, naar den kan bringes hen paa den ved Forskydning uden Drejning. Forf. se ikke, at dette Begreb »Forskydning uden Drejning« netop

7. Men Hensyn til Afsnittet om Paralleler, mod hvilket Hovedanken rettes, vare vi forberedte paa, at det fra nogle Sider vilde blive stærkt angrebet fra andre stærkt rost; bægge Dele er sket. Forinden vi fremsætte de nedenstaaende Bemærkninger, bede vi mindet, at der i Rækken af Geometriens Beviser findes et Hul, som man vel kan dække over mere eller mindre behændigt, men som ikke kan udfyldes. Hullet findes i

forudsætter Parallelbegrebet og derfor ikke kan bruges som Definition for dette. Sagen bliver ikke bedre ved Omformningen: To Linier kaldes parallele, naar de have samme Retning, thi at to Linier have samme Retning kan kun defineres ved at de ere parallele. De følgende Beviser støtte sig til den angivne Definition og ere derfor alle falske; de behøve imidlertid ikke denne Grund til at være det, da hver af dem desuden har sine specielle falske Slutninger. F. Eks. 18. »Naar to Linier overskæres af en tredje . . . Linier parallele«. Beviset føres ved, at den ene Linie »uden at forandre Stilling til Skæringslinien« og uden at være drejet skydes op paa den anden. Der forudsættes altsaa, at en Linie kan forskydes, saa at dens Vinkler med Skæringslinien ikke forandres og derved stadig være parallel med den oprindelige Stilling, men det er netop den Sætning, der skal bevises. Ganske det samme gælder de Beviser, som i vor Bog som hos de fleste andre Forfattere, i Afsnittet om Parallelerne. Idet da Nødvendigheden af dette Huls Tilstedeværelse er givet, formene vi ikke, at der er Grund til at føre saadan Klage over Afsnittet, som sket er og bemærke i den Anledning, at Grundlaget for den hele Fremstilling jo ingenlunde er usædvanligt. Vi minde da saaledes om, at en overmaade anset og meget udbredt tysk Lærebog, nemlig Boymanns Lehrbuch d. Mathematik (für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten von Dr. Johan Robert Boymann, Professor am kgl. Gymnasium zu Koblenz) hvis første Del indeholder Geometrien, allerede i 9de Oplag (1880) optog en Fremstillingsmaade, der hviler paa det nævnte Grundlag, om hvilket der i Noten Side 19 (vi citere efter 11. Oplag, besorgt von Dr. Karl Werr. Udhævelsen er af os) erklæres:

»Ein Vorzug dieser Erklärung dürfte darin bestehen, dass sich dieselbe an die Darstellung der Parallellinien, wie sie im Zeichenunt
lernnt wird, ansc

werden die Parallelen durch Fortschieben des Winkeldreieckes längs des festliegenden Lineals dargestellt. Diese Bewegung des Winkeldreiecks dient zur Versinnlichung der drehungslosen Verschiebung einer Geraden und beweist, dass der Vorstellung einer solchen drehungslosen Verschiebung nicht schon diejenige von parallelen Linien zugrunde liegt.«

Alene dette, at en Bog som Boymann's lader sin i de 8 første Oplag fremstillede Paralleltheori falde for at optage den her omhandlede, forekommer os at afgive et godt Vidnesbyrd om, at den dog vel næppe kan være helt forfejlet; men dertil kommer dog endnu det saare paafaldende i, at en Bog, der skulde indeholde saa store Urigtigheder, som den fremsatte Anke jo gaar ud paa, — Urigtigheder, der endog formenes tilstrækkelige til at gøre en anden Bog, der indeholder det samme, ubrugelig — skulde ikke alene kunne opleve nye og store Oplag, endog besørgede af forskjellige Udgivere, alle med de samme Urigtigheder, men at man endog skulde ville tillade dens fortsatte Benyttelse ved Gymnasialundervisningen i Preussen, hvor man jo dog ogsaa maa antages at forstaa sig noget paa Mathematik og mathematisk Undervisning. Alt dette forekommer os som sagt saare paafaldende og kan ikke andet end bringe os til at tvivle om Beføjelse af den Anskuelse, at den paagældende Fremstilling skulde kunne afgive et væsentligt Grundlag for vor Bogs Kassation; men selv om nu ogsaa saa var, saa kan jo da den Omstændighed, at de følgende Paragrafer hvile paa den anvendte Fremstilling, ikke være nogen ny Anke imod dem. Derimod erkende vi, at en Udsættelse mod § 18 er berettiget, idet der i Stedet for »$\angle$ a dækker $\angle$ b« skal staa »Toppunktet af $\angle$ a falder i Toppunktet af $\angle$ b, vil $\angle$ a dække $\angle$ b og L saaledes o. s. v.«; der findes altsaa en Fejl, men denne vil under Undervisningen formentlig af den Grund springe saa tydeligt i Øjnene, at den ikke vil give Anledning til Misforstaaelse, at der ved de to andre lignende Forskydninger, der omtales faa Linier før og efter

den her paaankede, bægge Gange udtrykkelig er angivet, at det er Vinkelgruppernes Toppunkter, der skulde bringes til at falde sammen.

Med loyal Indrømmelse af den saaledes her af os paapegede Mangel tilstaa vi, at Klagen kommer os overraskende.

37. Sætningen er jadsket affattet; man kan ikke andet end slutte af den, at to Trekanter, som have ... lige store, og den modstaaende Side mindre end den hosliggende, ikke kunne være kongruente.

8. Da det er forekommet os ikke at være heldigt straks i Paragraffens Begyndelse for Eleven at fremføre den Usikkerhed, hvorom der i det betragtede Kongruenstilfælde skal tales, og da vi ikke vilde fravige vor sædvanlige Praksis at anføre Sætningen først, saa have vi valgt at gennemgaa de enkelte Undertilfælde, forinden vi — hvad formentlig er bleven overset — i Paragrafens Slutning (og forøvrigt ved hvert Undertilfælde for sig) angive Sikkerhedsbetingelsen. Klagen findes at angaa en Ubetydelighed.

40. Her fortælles, at en Figur kan konstrueres naar dens bestemmende Stykker ere givne, uagtet man, ifølge 12, kun maa benytte Passer og Lineal.

9. Vi skrive i 40: »De Stykker, der bestemme en Figur saaledes, at den er kongruent med enhver anden Figur, der indeholder de samme Stykker i den samme Orden, kaldes dens bestemmende Stykker; af dem kan Figuren konstrueres«. Da vi imidlertid tidligere (§ 34) have skrevet: »En Figurs Sider og Vinkler tilsammen kaldes dens Stykker«, og da jo dog Sider og Vinkler kunne konstrueres ved Passer og Lineal, forekommer Klagen os at være ubegrundet.

43. Sætningen er kun halvt bevist.

10. Da Klagen allerede er fremsat under Post 4 og saaledes er en Gentagelse og da Gentagelser jo ikke bevise noget nyt, er Klagens fornyede Fremsættelse uden Betydning.

51. Afstand mellem Paralleler er ikke defineret.

11. Nej ganske vist ikke paa det Sted, men der er i Slutningen af 27 meddelt, at den vinkelrette fra et Punkt til en Linie kaldes Punktets Afstand fra Linien, og da man jo nu dog ved enhver Maaling maa gaa ud fra et eller andet Punkt, saa synes der at være meddelt alt, hvad der er fornødent og Klagen saaledes at være ugrundet. Ganske mærkeligt er det forøvrigt, at Prof. Petersen 1, der, hvor han omtaler Sagen, heller ikke definerer Afstand mellem Paralleler og 2, i flere af de ældre Udgaver af Geometrien ikke vides at have noget om, hvad der forstaas ved et Punkts Afstand fra en ret Linie.

51. Sætning 2 udledes af 51 men kan i Virkeligheden først udledes af en følgende Sætning o. s. v.

12. Det var maaske bedre, om Sætning 2 var rykket tilbage til en senere Paragraf, men da Prof. Petersen i alle Udgaver af sin Geometri udleder den af den samme Sætning, som ogsaa vi benytte, forekommer det os, at Klagen er mærkværdig. (Se Bilag A.*)

Professor Petersen fortsætter nu som følger:

Efterat Forfatterne paa de første 15 Sider saaledes have faaet lagt et Grundlag, hvis Lige i løs Tankegang neppe findes i nogen tidligere dansk Geometri, slutte de sig i det følgende til min Bog med en høj Grad af Frimodighed. Hele Anordningen af Stoffet,

*) Prof. Petersens Geometri § 69:

I et Parallellogram ere de modstaaende Sider og de modstaaende Vinkler lige store.

Følger Bevis og derefter:

Af denne Sætning følger, at Paralleler overalt have samme Afstand, og at det geometriske Sted for de Punkter, der have en given Afstand fra en given Linie, er to Linier, parallele med den givne i den givne Afstand.

Vor Geometri § 51.

I et Parallelogram ere de modstaaende Sider og de modstaaende Vinkler lige store.

Følger Bevis og derefter:

Dette medfører:

1, Paralleler have overalt samme indbyrdes Afstand, og

2, det geometriske Sted for de Punkter, der have en given Afstand fra en given Linie, ere to med denne parallele Linier i den givne Afstand.

Beviserne, Fordelingen og Arten af Opgaverne ere med uvæsentlige Forandringer som i min Bog (deriblandt mange af mine originale Beviser og Bemærkninger.) De finde dog rig Lejlighed til at ødelægge en hel Del af Beviserne ved deres Forbedringer. Saaledes ved Bestemmelsen af Cirkelperiferiens Længde« o. s. v., hvorom nedenfor skal tales. Uagtet vi ikke ere ganske visse paa, om Stedet her er det rette til at gøre disse Udtalelser til Genstand for en nærmere Betragtning, skulle vi dog ikke undlade ogsaa at omhandle dette Punkt men tillade os af den Grund at opsætte det, indtil vi have fremsat vore Bemærkninger til de positivt fremførte Anker imod Arithmetiken, at de anførte Beskyldninger komme igjen i forstærket Form ved Omtalen af den, idet Prof. Petersens Skrivelse i Afsnittet om Algebraen begynder saaledes: »Denne Bog er et passende Sidestykke til Geometrien. Den Frimodighed, hvormed min Bog er benyttet er om muligt endnu større end ved Geometrien, og Forbedringerne ere af en lige saa ødelæggende Natur«, hvorefter de Ankeposter fremsættes, til hvilke vi nedenfor knytte vore Bemærkninger. Vi notere paa dette Sted blot, at naar vi overhovedet vilde have Opgaver med i vore Bøger, saa maatte det dog være temmelig unaturligt, om vi ikke fulgte den almindelige Fremgangsmaade (smlgn. Boymanns Geometri; Amiot. Géometrie élémentaire 1850) at indsætte dem efter de Afsnit, til hvilke de knytte sig, og ligefrem være et Forlangende, at de i det hele skulde gives af en saadan Art, som mangeaarig Praksis har fastslaaet, og som erfaringsmæssigt fører godt til Maalet; i een Henseende mene vi her at have et ikke uvæsentlig Fortrin fremfor Prof. Petersen, nemlig i denne, at der iblandt vort meget store Forraad af Opgaver er optaget mange meget lette. Prof. Petersens sidste Klagepunkt vedrører (som ovenfor anført) Bestemmelsen af Cirkelperiferiens Længde og gaar ud paa følgende:

Bogen begynder meget godt, men saa mene Forfatterne at kunne skyde en Genvej, og det lykkes dem derved at gøre hele Udviklingen meningsløs; med deres uklare Opfattelse kunne de ikke se, at det, at en omskreven Polygon nærmer sig i Beliggenhed til en Cirkelperiferi ikke er det samme som at deres Længder nærme sig til hinanden.

13. Om de ind og omskrevne Polygoners Perimetre er der i 96 angivet, at de ved Fordobling af Sideantallet bestandig henholdsvis vokse og aftage; da disse Udtryk dog vel ikke kunne forstaas som gældende andet end Længderne, have vi ikke kunnet skønne, at der er nogen Grund til Klagen.

II. Algebraen.

Prof. Petersen skriver

Forf. begynde med en falsk Definition af Begrebet Størrelse (efter den vilde f. Eks. Kærlighed og Had være Størrelser.

1. Størrelse bruges efter vor Formening ikke alene i Betydningen Storhed men ogsaa om det, der har Storhed (Størrelse); det hele synes at være en Strid om Ord. Forøvrigt er Definitionen den almindeligt anvendte ogsaa af mathem. Forfattere (saaledes f. Eks. Lorenz i element. Arithmetik og Oberstløjtnant V. H. O. Madsen, Lærer ved Officerskolen, i Arithmetik og Algebra). — Ogsaa moralske Egenskaber indordnes af mange Filosofer under Størrelsesbegrebet.

Forf. følge derefter min Indledningsmaade, men slaa pludselig over i en anden (anvendt af Prof. Steen) uden at se, at denne Sammenblanding maa føre ind i et Virvar.

2. Vi følge hverken den ene eller den anden af de omtalte Indledningsmaader. Vi knytte vor Bog til Regneundervisningen, under hvilken der selv paa dens allerførste Trin tales om Enheder af forskellig Art, først hele (ubenævnte og

benævnte, og saa med den analoge Inddeling; alt dette er bekendt fra Eleverne og der er saaledes intet i Vejen for, at det kan optages i en Indledning, hvad jo da ogsaa andre end Prof. Petersen have gjort, f. Eks. Etatsraad Lorenz, der endog gaar saa vidt, at han medtager Decimalbrøker.

De burde have set dette allerede ved deres første Bevis (4), men klare Vanskeligheden ved uden videre at udelade nogle Parenteser, som de selv et Par Linier i Forvejen have vist Nødvendigheden af.

3. Efter vor Formening er Anken ugrundet. Vi skrive: »Ved en Parentes betegnes, at alt, hvad der staar i den, skal beregnes for sig; altsaa har man f. Eks. (6 — 3) ÷ (9 ÷ 7) = 9 ÷ 16.

Opløses de enkelte Addender i Størrelse 4 ÷ 2 ÷ 5 ÷ 3 i deres Enheder, kan den skrives

1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1 ÷ 1.

Da det nu er øjensynligt, at her findes lige mange Enheder, hvad enten man tager de fire Addender i den ene eller den anden Orden, eller man først lægger nogle af dem sammen og saa det udkomne heraf til de andre, saa har man altsaa

4 + 2 + 5 + 3 = 3 + 5 + 2 + 4 = 5 + 3 + 4 + 2 = 4 + (2 + 5) + 3 = 4 + (2 + 5 + 3) = (4 + 2) + (5 + 3) = (4 + 2 ÷ 5) + 3 o.s.v.

Da det samme aabenbart gælder, hvor mange og hvilke forskellige Tal, man vælger til Addender, saa gælder det altsaa i al Almindelighed, at Addendernes Orden er vilkaarlig«. Vi kunne ikke her se nogen gyldig Grund til Klage, men bedre var det maaske om Paragrafen var bleven delt i to, den første indeholdende Parentesernes Betydning, den anden Sætningen om Addendernes Orden. — Naar Prof. Petersen taler om det Virvar, vi maa føres ind i, — formentlig allerede paa det her omhandlede Standpunkt, — ses dette ikke, eftersom Brøker i Analogi med benævnte Tal ere af os indførte som hele Antal af (nye) Enheder.

Indførelsen af negative Tal, der med stor Om-

4. At vi ekspedere d hele Udvikling paa et Par Li

hyggelighed maa lægges til Rette for at blive forstaaelig for Elever (jeg bruger c. 4 Sider) ekspederes paa et Par Linier, men Resultatet er ogsaa derefter. Skal man trække 9 fra 7, kan, hvad enten man følger den ene eller den anden af Forf. to sammenblandede Veje, Svaret kun blive, at Opgaven er umulig. Forfatterne sige imidlertid uden videre »dette Tal kaldes —2« uden at bryde sig om, at Tallet efter deres egen Forklaring slet ikke eksisterer. At adskillige andre Forf. gaa lige saa løst til Værks kan ikke tjene som Undskyldning; naar Forf. afskrive meningsløse Udviklinger, maa de selv tage Ansvaret for dem.

er ikke korrekt, eftersom vi bruge §§ 9—12 ɔ. ialt 3 Sider til de nødvendige Forklaringer. — Det er ikke forekommet os heldigt paa et saa tidligt Trin at erklære om en Opgave, der er stillet til Løsning, først at den er umulig og dernæst, at man vedtager den bestemte Løsning af den; Eleverne kunne ikke se Grunden til dette (i Modsætning hertil smlgn. § 18 og fl. St., hvor Grunden til de vedtagne Løsninger ligge klart for og derfor ere fremsatte for Eleverne). Derfor angive vi straks den vedtagne Løsning, om hvilken det ad den Vej meddeles, at den indeholder noget nyt, at der skrives »dette Tal betegnes« (ikke kaldes) »— 2«. Dernæst fremsættes de nye Tals Egenskaber, Talrækken udvides ved den, Additioner og Subtraktioner med dem foretages, og tilsidst gives der ved Eksempler Oplysning om Forskellen mellem Begrebene positivt og negativt. Vi tro saaledes, at det er uden Føje, at der klages over, at vi ikke med tilstrækkelig Omhyggelighed lægge Sagen til Rette, for at den kan blive forstaaelig for Eleverne, og vi have saa megen større Grund til at tro dette, som medundertegnede Schmidt i sin snart 20-aarige Lærervirksomhed her ved Skolen aldrig mindes at have lagt Sagen derledes frem for Eleverne og aldrig hat set andet, end at

den derved baade let opfattedes og sikkert tilegnedes. Vi anse derfor i Henhold til alt dette Klagen for lidet betydende.

Beviset for at Ordenen af Leddene i en flerleddet Størrelse kan ombyttes, føres saaledes, (14): »Ved at overveje hvilke Tælninger frem og tilbage i Talrækken, der skulle foretages som Følge af de i nedenstaaende flerledede Størrelser indeholdte Led, vil man — især bekvemt ved at foretage Tælningen langs en Tommestok — overbevise sig om, at man maa have« og saa følge nogle Formler som

$a + b - c = a - c + b$,

$a - (b - c) = a - b + c$ o. lign.

Jeg ved ikke, om jeg her mest undrer mig over Forf. Forestilling om, hvorledes et mathematisk Bevis ser ud, eller over deres Mangel paa pædagogisk Sands.

5. Hvis Mathematikundervisningen selv paa dens elementære Standpunkt skal gaa ud paa saa fint og udpenslet som muligt at opføre Mathematikens Lærebygning for Eleverne, ja saa er det naturligvis absolut forkasteligt at vove et Forsøg paa en Reduktion af det store Antal Smaasætninger, i hvilke Begynderne erfaringsmæssigt drukne, ved som her at samle en Del af dem i eet Bevis. Hvis den Anskuelse, som deles af mange, — blandt hvilke ogsaa Mathematiklærere — derimod kunde vinde Raaderum, at Mathematiken har mere end Stof nok i sig til at udvikle Elevernes Tænkeevne, selv om man paa et og andet Punkt slaar noget af paa Systemet i den Hensigt derved at lette Eleverne Arbejdet og navnlig noget hurtigere, end det nu er Sædvane at bringe dem ud over Begyndelsen, der erfaringsmæssigt er noget af det allerværste for dem, — og denne Anskuelse hylde vi — saa kunne vi ikke indse, at der kan være nogen rimelig Indvending imod vor Maade at tage den her omhandlede Sag paa, saa meget mindre, som den jo da i sig selv er rigtig nok. Det hele staar altsaa for os som et Principspørgsmaal, hvorom der naturligvis kan tvistes; at der ikke skulde kunne opnaas et i alle

respektabelt Standpunkt ad den Vej, vi her — og andre Steder — gaa, det tvivle i det mindste vi om.

Forf. Mangel paa klar Opfattelse viser sig stadig; saaledes indføres i 27 Betegnelsen $\frac{a}{b}$ med een Betydning, uagtet den tidligere er indført med en anden Betydning $\left(a \cdot \frac{1}{b}\right)$.

6. Fra et videnskabeligt Standpunkt bør man selvfølgelig ikke give to Tegn for Division men kun det ene (:); men da vi dog baade fra vor egen Lærervirksomhed og fra Samtaler med mange andre Lærere have erfaret, at Eleverne ikke kunne bringes til at opfatte Forskellen (mulig fordi de fra Regneundervisningen ere blevne vænnede til at bruge bægge Tegn i Flæng), og da Standpunktet jo dog nu engang er rent elementært, saa have vi anset det for ganske overflødigt at foretage Adskillelsen.

I 29 gives et »selvfølgeligt« i Stedet for et Bevis.

7. Det er en umiddelbar Følge af vort Størrelsesbegreb — og behøver saaledes intet mathematisk Bevis — at naar de Enheder, hvormed der maales, gøres n Gange mindre eller større, saa bliver hver Del n Gange større eller mindre (hvad ogsaa f. Eks. Etatsraad Lorenz anvender i sin Bog, hvor han har det i Indledningen, medens vi vente dermed, til vi have Brug derfor). Vi kunde naturligvis meget godt have opstillet Sætningen i mathematiske Tegn og bevist den, men da Sagen jo dog er selvfølgelig, saa vilde saadant forekomme os urimeligt.

I Beviset Pag. 30 øverst er der et Spring i Tankegangen, hvad der omhyggelig bør undgaaes ved et Bevis som dette, der altid falder vanskeligt for Eleverne.

8. Vi have fra vor Lærervirksomhed Erfaring for, at Sagen — taget paa vor Maade — aldrig volder Vanskelighed.

Afsnittet om Tals Delelighed danner et Side-

9. Det er ganske vist, at der her er udeladt en Sætning

stykke til Geometriens Parallelteori, i det de fleste Beviser ere falske. Sagen er den, at Forf. mangle den Sætning, at et Primtal, der gaar op i et Produkt, maa gaa op i en af Faktorerne (el. en lignende) og uden den kan man ingen Veje komme. Dette er en saa vel bekent Ting, at jeg ikke skal opholde mig derved. Der gives saaledes en Mængde positive Fejl af den alvorligste Art, men desuden er Fremstillingen tidt afjadsket: Saaledes er Paastanden øverst Side 34 kun rigtig, naar k er et Primtal.

I 43 burde fremhæves, at Ligningen er en Identitet (den vigtige Forskel imellem identiske og ikke identiske Ligninger er i det hele taget slet ikke omtalt).

som den omtalte, men det er lige saa vist, at en saadan Sætning efter Sædvane ikke tages med i det Kursus (til alm. Forberedelseseksamen) som vor Bog er beregnet paa; i et eventuelt Afsnit for 5.—6. Kl. maatte den selvfølgelig med. Men naar det da nu forholder sig saaledes, saa indse vi ikke nogen virkelig Grund til at optage Sætningen i Bogen og anse derfor Klagen for ugrundet.

10. Vi indrømme, at Sagen kunde have været bedre formuleret, men det tør vel antages for utvivlsomt, at den ikke vil blive misforstaaet.

11. I den elementære Undervisning spiller Identiteter som saadanne ingen som helst Rolle uden som Formler, vi have derfor ikke anset det for nødvendigt at indføre Benævnelsen Identitet. Da Ligningen i 43 nu netop fremtræder som Formel (Divtdend lig Divisor Gange Kvotient plus Rest), og da den kun i sit Ydre har Lighed med de hidtil omtalte Ligninger, derved at den indeholder Bogstavet x, saa tro vi, at Anken kun angaar en saadan Ubetydelighed, at vi kun for Fuldstændigheds Skyld besvare den; ogsaa Prof. Petersen selv anser den formentlig for uvæsentlig, idet han skriver »burde fremhæves«.

45,3 er vildledende, idet Eleven maa faa den Forestilling, at der kun gives Ligninger af første Grad.

12. Eftersom den Overskrift, der nogle faa Linier foran paa samme Side findes over Afsnittet, hedder »Ligninger af første Grad«, og altsaa udtrykkelig giver til Kende, at der kun skal tales om Ligninger af første Grad, anse vi Klagen for fuldkommen ubeføjet.

Betingelsen 1,146 sidste Stykke er gal.

13. Betingelsen er rigtig nok, men ved Forklaringen er der af den Grund kun set hen til to Ligninger, at dette er det simpleste og hyppigst forekommende Tilfælde, saa meget mere som Ligningernes Identitet kun meget vanskeligt viser sig for Eleverne paa det elementære Standpunkt, førend man ved Eliminationen er naaet ned til to Ligninger.

Beviset i 54 er falsk paa Grund af den ovenfor nævnte manglende Sætning.

14. Klagen er en Gentagelse af Post 9 og som saadan uden Betydning.

Definitionen paa Proportioner er urigtig.

15. Prof. Petersen siger i sin Arithmetik Pag. 70:

»En Ligning, der udtrykker, at to Forhold ere ligestore, kaldes en Proportion«. Vi sige (§ 56):

»En Proportion er en Ligning imellem to Forhold« men have tidligere (§ 16) udtalt: »En Ligning er et Udsagn, der tilkendegiver, at to Størrelser ere lige store«, Det forekommer os, at her ikke er nogen Forskel. Vor Definition findes forøvrigt ogsaa i Schlömilch Handbuch d. Mathem. Pag. 105.

Beviset for, at Proportionernes Rigtighed prøves ved o. s. v. (57) er ufuldstændigt.

16. Ufuldstændigheden er kun tilsyneladende hidrørende fra, at vi, efter at vi have bevist den direkte Sætning, oplyse den hele Sætnings Be-

[illegible] tage den omvendte Retning. Det maatte [illegible] [illegible] vente med Eksemplet til side [illegible] Det forekommer os [illegible] og ikke maa hemmes [illegible] over det — hvad vi formode er overset — gøre Rede for [illegible]

[illegible] og gentagne Gange fremsatte [illegible] Prof. Petersens [illegible] have taget Grundlaget af Stoffet [illegible] Opgaverne efter dem. For [illegible] Geometrien er der allerede [illegible] samme kan siges m. H. t. [illegible] angaaende de to første [illegible] fremsættes v. d. den alm. [illegible] Kursus ikke er noget nyt. [illegible] Sætninger. Dette Kursus [illegible] saa tidt frem- [illegible] vendte, at hver kommende [illegible] paa mere eller mindre [illegible] naturligvis findes der [illegible] har været prøvet [illegible] gjort god Nytte. Vi [illegible] at omordne og fremsætte det [illegible] vi have fra vor mange-aarige [illegible] at den tjener Disciplenes Tarv bedst.

1. Aritmetiken. Vi have allerede under Post 2 forklaret, hvordan det har sig med vor Indledning og have der gjort Rede for, at vi i Fortsættelse af det, som fra Regneundervisningen er bekendt, har omtalt Brøkerne, hvilket ogsaa andre f. Eks. [illegible] have gjort; men selv om saa ikke var, saa er det jo da det at opfatte Brøker som hele Antal af (nye) Enheder en Kunst, der er lige saa gar
af Regneundervisning, saa alene af den Grund kar

gøres nogen Indvending imod Indledningen. At Brøkerne saa igen komme med hos os ved hver Regningsart, ja det skyldes den Omstændighed, at vi stillede os som Princip saa vidt muligt at samle ensartede Operationer paa samme Sted, en Regel, som ikke er fraveget derved, at Ligningerne komme paa Omtale flere Steder, eftersom det, der hvergang fremsættes, netop er en direkte Anvendelse af det, der i samme Afsnit har været Genstand for Behandling.

Med Hensyn forøvrigt til Stoffets Ordning, henvise vi til Bilag B*); det er os virkelig ikke muligt at se andet, end at der her er saa stor Forskel, som der vel egentlig godt kan være Tale om, naar det er det samme Stof, der skal behandles i samme Omfang, og for saa vidt kunde vi gerne have afholdt os fra videre Omtale af Sagen, men vi ønske dog endnu at henlede Opmærksomheden paa følgende: Ligesom Prof. Petersen have vi under Multiplikation $(a \pm b)^2$ og $(a + b)(a - b)$, hvilket, saa vidt vi vide, ikke findes i andre danske Lærebøger; men 1, fremkommer dette som ganske naturlig Anvendelse af de foregaaende Sætninger, hvorfor da ogsaa f. Eks. Reidt (Schlö-

---

Prof. Petersens Arithmetik:

1. Indledning.
2. Addition.
3. Subtraktion.

(Herunder a, flerleddede Størrelser samt b, et særegent Afsnit: positive og negative Tal.)

4. Multiplikation.
5. Division.

(Herunder om Brøkens Generalnævner, Polynomiers Division og Sætningen om at $x - \alpha$ gaar op i et Polynomium, naar dette bliver til Nul, saafremt man for x sætter α).

6. Potens.
7. Ligninger.
8. Proportioner.
9. St. f. Maal og mindste f. Mangef. (Tals Delelighed).
10. Decimalbrøker.
11. Uendelig og ubestemt.

Vor Arithmetik:

1. Indledning.
2. Addition.
3. Subtraktion.

(Herunder a, pos. og neg. Tal samt, b, flerleddede Størrelser; endvidere begyndes her med de simpleste Ligninger).

4. Multiplikation.
5. Division.

(Herunder Polynomiers Division)

6. Tals Delelighed.

(Herunder Maal og Mangefold, Brøkers Generalnævner og Sætningen om, at $x - \alpha$ gaa op i et Polynomium, naar o. s. v.)

7. Ligninger.
8. Decimalbrøk.
9. Proportioner.
10. Potens.

milchs Handb. d. Math. 1879. I. Pag. 19) indleder sin Omtale af disse Formler med den Bemærkning: »Als besondere Fälle der obigen Regeln sind noch folgende Formeln bemerkenswerth« og saa medtager dem netop paa samme Sted som vi, og 2, er ganske det samme gennemført i Bardeys methodisch geordnete Aufgabensammlung, der fra 1871 er udkommen i Oplag efter Oplag, og som vi benytte ved vor Undervisning; Tanken er saaledes aldeles ikke ny.

Sætn. 43 have vi af den Grund været nødte til at medtage paa det Sted, hvor den findes, at vi have Brug for den til deraf at udlede Reglen for Tals Delelighed med 11; havde det ikke været Tilfældet, vilde den være bleven gemt til Bogens 2. Del, men forøvrigt findes den ikke paa samme Sted i Udviklingen hos Prof. Petersen og hos os. I Decimalbrøkernes Behandling have Bøgerne nogen Lighed men samme Lighed har paa samme Sted vor Bog med Oberstløjtnant Madsens. Afsnittet om Potens have vi taget med i 1. Del, fordi Eleverne altid naa at faa det med i 2. Klasse; hvis vi altsaa ligesom Steen gemte det til 2. Del, maatte der købes en ny Bog i Løbet af Skoleaaret, og det have vi ikke anset for heldigt. Bestemmelsen af Potensernes Fortegn have bægge Bøgerne fælles med Oberstlt. Madsens; negative Eksponenter indføre vi paa samme Maade som Prof. Petersen, men ganske det samme findes hos Madsen, Lorenz og Krarup-Hansen, mer eller mindre med de samme Ord. Sætningen om at flytte en Faktor fra Tæller til Nævner i en Brøk med forandret Fortegn for Eksponenten er en gammel bekendt Sætning (findes f. Eks. hos Caspari), $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$ findes hos C. F. C. Møller og Bardey og saaledes videre. Det vil vistnok heraf fremgaa, at der ikke foreligger nogen som helst Grund for Prof. Petersen til at tale om Frimodighed i Henseende til Benyttelse af hans Bog.

2. Geometrien. Efter gammel Praksis, som der ikke har været nogen Grund for os til at fravige, falder vor Bog i to Hovedafsnit, 1, Linier, 2, Arealer; efter de sidste have vi

genoptaget Figurers Forvandling i den ældre udførlige Form; Prof. Petersen har saa godt som intet derom. Inden for de enkelte Afsnit have vi igen gjort os det til Regel 1, saa vidt muligt at tage alt, hvad der vedrører rette Linier førend det, der vedrører Cirkler 2, at samle sammenhørende Ting, saa vidt det lod sig gøre. Ud fra disse Hovedregler er vort Stof ordnet og derved er vor Ordning saa godt som helt igennem bleven sammenfaldende med Boymanns oven citerede Geometri, som vi overhovedet have haft megen Nytte af; bemærkes kan det ogsaa, at vi aldrig sætte Sætninger ind blandt Opgaver og altsaa i den Henseende ere aldeles forskellige fra Prof. Petersen. Med Hensyn til Beviserne fremlægge vi under Bilag C (nedenfor) en Fortegnelse, hvoraf det fremgaar, at de Beviser, der ere fælles for Bøgerne, findes — som det da ogsaa var at vente — ogsaa andre Steder; Listen kunde med Lethed suppleres med flere Forfatternavne; der forekommer i denne Liste ikke saa helt sjeldent Ordene »Er ikke fælles«, hvilket bedes bemærket.

Samle vi da nu de mod vore Bøger positivt rettede Klager sammen, saa forekommer det i det mindste os, at Prof. Petersens Dom er i høj Grad overdreven. Mèd Hensyn til 1, Geometrien er det jo nemlig saaledes, at

1. Hovedklagepunktet Nr. 7 (Parallelerne) kunne vi umulig antage at være af videre Betydning, eftersom det er os aldeles ufatteligt, at man skulde ville tillade mange Slægtled af Skoledisciplene ved Gymnasierne i Preussen at fyldes med noget saa absolut elendigt, som det jo her siges at være.

2. Der er een positiv Fejl (7) men den kan jo da rettes og oven i Købet meget let rettes, som foran anført.

3. Der er Klagepunkter, som hverken vi eller andre mathematikkyndige Mænd have kunnet se mindste Grund til, og som dog derfor vel tør antage for ganske betydningsløse (6, 9, 11, 13).

4. Der er Klagepunkter, som angaar rene Smaasager (Tildels 1; 2, 3, 5, 8).

5. Der er Gentagelse af een af Klageposterne (10).

6. Der er endelig Klagepunkter, ved hvis Eftersyn det viser sig, at vi have ganske det samme som Prof. Petersen (1, 4, 11, 12); særlig dem have vi forundret os over, thi vi kunne ikke forstaa, at hvad der er rigtigt i den ene Bog kan være galt i den anden.

7. Der siges efter at Klageposterne ere anførte, »o. s. v. o. s. v.«, og det er vel muligt, at der et eller andet Sted kan findes et mindre godt Udtryk. men hvor findes den Lærebog, der undgaar saadant, og hvor mange findes der, der ere uden Fejl? Vistnok ikke ret mange af dem, der dog stadig benyttes med godt Udbytte.

Det forekommer os da saaledes, at der ikke foreligger tilstrækkelig Grund til rent ud at kassere vor Bog, saa meget mindre som den holder sig nøje op til det ved mange Aars Sædvane fastslaaede Kursus. Vi forundres ogsaa over, at der ikke med et eneste Ord er talt om Bogens gode Sider; thi at den — saa vel som Arithmetiken — har saadanne, det maa vi dog vel af den Grund være berettigede til at tro, at der fra de mest forskellige Sider er tilstillet os Udtalelser i saa Henseende, ligesom det jo ogsaa vil være Hr. Rektoren bekendt, at i det mindste ved een af de lærde Skoler har der været Ønske fremme om at indføre bægge Bøgerne til Brug ved Undervisningen.

Hvad 2, Arithmetiken angaar, da maa Hovedklagen (9) formentlig rent bortfalde, eftersom det jo dog er en Kendsgerning, at den Sætning, som ganske rigtig ikke er medtaget overhovedet slet ikke medtages i det Kursus (til alm. Forberedelseseks) Bogen alene er bestemt for; af de øvrige Klager findes nogle at være ganske ubegrundede (3, 12, 15, 17) nogle at angaa rene Smaasager (1, 4, 7, 8, 11, tildels 16), een er en Gentagelse (14), een vedrører en mindre god Formulering (10); de øvrige angaa Principspørgsmaal, og derved kommer Sagen til at stille sig noget anderledes her end ved Geometrien, idet Bogen jo netop er udarbejdet med det Hensyn for Øi-

som allerede er omtalt under Klagepost 5, og som er udsprunget af Ønsket om at lette Eleverne Arbejdet, hvilket er tænkt udført paa den Maade, at Undervisningen paany føres hen imod det Spor, hvori den tidligere gik uden Paaanke, og det forekommer os, at naar man paa Forhaand fordømmer Tanken om, at der ogsaa nu kan udrettes noget godt ad en saadan Vej, saa gaar man ud fra, hvad der netop skal bevises. Vi indse forøvrigt naturligvis meget godt, at den Maade, hvorpaa vor Bog netop ud fra dette Synspunkt er affattet, a priori maa give den en uheldig Position hos de mange, for hvem en detailleret Gennemførelse af det mathematiske System er et Forlangende, som de ikke mene at kuune slaa noget af paa; de ville derfor bedømme Bogen efter dens »videnskabelige« Værdi, medens vi mene, at det retteste Grundlag for Bedømmelsen af en Skolebog, der jo udtrykkelig angiver sig selv som beregnet paa det rent *elementære* Standpunkt er det, om den indenfor den givne Ramme tilfredsstiller de Fordringer, der maa stilles til dens praktiske Anvendelighed. Os forekommer det at ville være adskilligt værd, om *et Forsøg i den af os antydede Retning maatte blive anstillet, for at det derved kunde blive afgjort, hvor vidt Eleverne ad vor Vej kunde føres lige saa vidt i mathematisk Indsigt* — hvilket vi, som daglig gaa over og midt i Sagen og i mange Aar have haft Lejlighed til at se den fra allerførste Haand, ikke tvivle om, — *som for Øjeblikket; faldt et saadant Forsøg heldigt ud, saa er det jo da givet, at derved var vundet adskilligt for Eleverne.* —

Vi tillade os nu i al Ærbødighed at anmode Hr. Rektoren om at ville gøre Ministeriet bekendt med denne vor Skrivelse, idet vi nære det Haab, at det af den skal fremgaa, at Sagen kan ses ogsaa fra en anden Side end den, hvorfra Prof. Petersen har set den. Eftersom Prof. Petersen dernæst baade offenlig og ad privat Vej har tilladt os i Mathem. Tidsskrift at offenliggøre hans Skrivelse tilligemed vore Bemærkninger til den, vi tillige ærbødigst om, at Hr. Rektoren vil for

os hos Ministeriet søge ogsaa om dettes Tilladelse til en saasaadan Offenliggørelse, for saa vidt vi senere maatte finde Anledning til at foranstalte den.

Ærbødigst

S. A. Christensen. Karl Schmidt.

Odense, den 9. Juli 1891.

Til velbaarne Hr. Rektor Petersen R. af D., Dbmd.

1—24. Er ikke fælles.
25. Følger af 23.
26. Boymanns Geometri.
27. Oppermann, Schlömilch.
28. Berg, Henr. Smith, Amiot, Mundt.
29. Boymann, Schlömilch.
30. Konstruktion, fælles for alle Forf.
31. Boymann, Oppermann.
32. Oppermann, Schlömilch, Boymann.
33—42. Er ikke fælles.
43. Konstruktion, fælles for alle Forf.
44—50. Er ikke fælles.
51—55. Mundt, Berg, Oppermann, Amiot, Schlömilch.
56—58. Er ikke fælles.
59. Mundt, Boymann, Henr. Smith. Schlömilch.
60. Er ikke fælles.
61—62. Amiot, Henr. Smith, Schlömilch.
63. Er kun tildels fælles. Henr. Smith.
64. Er ikke fælles.
65. Konstruktion, fælles for alle Forf.
66. Amiot, Berg, Henr. Smith, Schlömilch.
67. Kun tildels fælles; Oppermann, Henr. Smith.
68. Berg, Henr. Smith.
69—70. Konstr. af Tangenter, Cirklens indbyrdes Stillinger, fælles for alle Forf.
71—74. Boymann, Amiot, Berg, Mundt, Schlømilch.
75—77. Er ikke fælles.
78. Amiot.
79. Kunstruktion, fælles for alle.
80—83. Mundt, Berg, Oppermann, Boymann.
84—86. Retvinklet Trekant, fælles hos saa godt som alle Forf.
87. Ptolemæus, ligeledes.
88—90. Amiot, Berg, Henr. Smith, Schlömilch.
91. Sammenfatter de tre foregaaende Sætninger.
92—96. Er ikke fælles.
97—102. Kordeberegning (k_4, k_6, k_{10} ...) Berg, Boymann, Oppermann, Schlömilch.
103. Boymann.
104. Er ikke fælles.
105. Følger af 9.
106-113. Mundt, Berg.
114—15. Er ikke fælles.
116. Berg, Oppermann.
117. Amiot, Boymann, Berg.
118—119. Er ikke fælles.
120. Følger af 9 og 105.
121. Fælles for alle Forfattere.
122—24. Henr. Smith, Mundt.
125. Konstruktion, fælles for alle.
126. Berg, Mundt.
127. Berg, Mundt, Amiot.
128. Amiot, Mundt.
129. Er ikke fælles.

Danske Eksamensopgaver.

Opgaver ved den kgl. Landbohøjskoles Eksamen.

(Oktober 1891.)

---

1. Beregn Areal og Omkreds af Figuren ABCDE, hvor

Siderne BC = 4,0123	$\angle$ ABC = 33°27',6
— CD = 4,2378	og endelig er Cirkelbuen
Diagonalen AC = 3,7246	DEA = 321°45',6
og Linien AD = 6,2174	(udenfor Firkanten).

Opløsning. I $\triangle$ ABC findes log sin A = 9,77374 — 10, $\angle A_1 = 36°26',2$ og $\angle A_2 = 143°33',8$, hvoraf $\angle C_1 = 110°6',2$ og $\angle C_2 = 2°58',6$; log c_1 = 0,80235, c_1 = 6,3439 og log c_2 = 0,54506 — 1, c_2 = 0,3508; log T_1 = 0,84614, T_1 = 7,016(8) og log T_2 = 0,58885 — 1, T_2 = 0,388(0).

I $\triangle$ ACD faas log T = 0,88680, T = 7,705(5).

Kaldes Cirklens Radius r, Buen AED = b og det tilsvarende Udsnit u, haves r = 3,1087 . sec 70°52',8, log r = 0,97731,

$$b = \frac{321°45',6}{360°} . 2\pi r, \text{ log } b = 1,72628, b = 53,2450;$$

$$u = \frac{8044}{9000} . \pi r^2, \text{ log } u = 2,40256, u = 252,672.$$

Betegnes Cirklens Centrum ved O, vil

$\triangle$ ADO = $3,1087^2$. tg 70°52',8, log T = 1,44524 og $\triangle$ ADO = 27,876(6).

Heraf faas da Arealet lig 295,27(1) eller 288,64(2) og Omkredsen lig 67,839(0) eller 61,845(9).

2. I en Kugle med Radius r = 1,2378 er indskreven en Dobbeltpyramide, bestaaende af 2 kongruente regelmæssige Pyramider, hvis fælles Grundflade er en regelmæssig 8-kant. — Søg Dobbeltpyramidens [1]) Rumfang og [2]) Overflade, [3]) Forskellen mellem Rumfang af den givne Kugle og af den Kugle, der kan indskrives i Dobbeltpyramiden, samt endelig [4]) Rumfanget af en Pyramidespids, der afskæres ved en Plan, der er

parallel med den fælles Grundflade og Tangentplan til den indre Kugle.

Opløsning. Rumfang V og Overflade O findes af $V = \frac{4}{3} r^3 \sqrt{2}$ og $O = 16r^2 \sin 22\frac{1}{2}^0 \sqrt{1 + \cos^2 22\frac{1}{2}^0} = 8r^2 \sin 22\frac{1}{2}^0 \sqrt{6 + \sqrt{2}}$, $\log V = 0{,}55341$, $V = 3{,}576(1)$, $\log O = 1{,}10626$, $O = 12{,}772$.

Den indskrevne Kugles Radius $r_1 = \frac{2r \cos 22\frac{1}{2}^0}{\sqrt{6 + \sqrt{2}}}$,

$\log \frac{r_1}{r} = 0{,}83162 - 1$, $\frac{r_1}{r} = 0{,}67861$, $\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 = 0{,}31251$.

Forskellen $F = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^3\right) = \frac{4}{3} r^3 . \pi . 0{,}68749$,

$$\log F = 0{,}73731, \quad F = 5{,}461(5).$$

Den afskaarne Spids's Rumfang $V_1 = \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^3 . \frac{V}{2}$

$= 0{,}32139^3 . \frac{V}{2}$, $\log V_1 = 0{,}77350 - 2$, $V_1 = 0{,}059(4)$.

3. At finde de reelle Rødder i Ligningerne

$$(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)\,(x^2 + 2xy + y^2) = \sqrt{a^3}$$

og $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) . (x^2 - 2xy + y^2) = \sqrt{b^3}$,

hvor a og b ere givne reelle Værdier.

Ex. $a = 36$, $b = 28$; x og y søges med 2 rigtige Decimaler.

Opløsning. De givne Ligninger omskrives til

$$(x^2 + y^2)\,(x + y)^3 = \sqrt{a^3}$$

$$(x^2 + y^2)\,(x - y)^3 = \sqrt{b^3},$$

hvoraf $$\frac{x+y}{x-y} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

hvorved den ene ubekendte kan bortskaffes, og man finder

$$x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[5]{16\,(a + b)}}, \quad y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[5]{16\,(a + b)}}.$$

Ex. $x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} = 2{,}82$, $y = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = 0{,}18$.

4. En Ellipse med Akserne henad Koordinatakserne gaar gennem Punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Søg

1) Længden af Ellipsens Akser og

[2]) Koordinaterne til Polen for de to givne Punkters Forbindelseslinie som Polar.

Opløsning.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{aligned}\right\}\text{ give }\frac{1}{a^2}=\frac{\begin{vmatrix}1 & y_1^2\\ 1 & y_2^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1^2 & y_1^2\\ x_2^2 & y_2^2\end{vmatrix}},$$

hvoraf $2a=2\sqrt{\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}{y_2^2-y_1^2}}$, $2b=2\sqrt{\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}{x_1^2-x_2^2}}$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1\\ \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1\end{aligned}\right\}\text{ give }x=\frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{y_1}{b^2}\\ 1 & \frac{y_2}{b^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2}\\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2}\end{vmatrix}}=\frac{(y_2-y_1)\,a^2}{x_1y_2-x_2y_1},$$

$$x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_2},\ 4=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}.$$

Almindelig Forberedelseseksamen.

Januar 1892.

Aritmetik.

1. Bevis, at det mellemste af tre paa hinanden følgende Led i en Kvotientrække er Mellemproportional mellem det første og det sidste af de tre Led.

Kunne tre paa hinanden følgende Led i en Kvotientrække ogsaa være tre paa hinanden følgende Led i en Differensrække?

2. Find x af Ligningen

$$\frac{x}{ac}-\frac{c-a}{a(x-b)}=\frac{1}{c}+\frac{1}{x-b},$$

og vis, at Rødderne altid ere reelle, naar a, b og c ere positive eller negative Tal.

3. Beregn ved Logaritmer

$$\sqrt[5]{0{,}94573^2-2{,}94537^2}.$$

Opløsning. 1. Kaldes det mellemste Led a, Kvotienten q, er det første Led $\frac{a}{q}$, det tredie aq og

$$\frac{a}{q} \cdot aq = a^2, \text{ hv. s. b.}$$

Kaldes Rækkens Differens d, Leddene a — d, a, a + d, skal

$$a^2 - d^2 = a^2,$$

$d = 0$, $q = 1$ altsaa et Grænsetilfælde.

2. Ved Multiplikation med Generalnævneren af x — b og simultanelig Reduktion bringes Ligningen paa Formen

$$x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0,$$

der giver $x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 4c^2}}{2}$,

der ere reelle naar a og b ere reelle, idet i saa Fald Størrelsen under Rodtegnet som en Sum af to Kvadrater er positiv.

3. Størrelsen er negativ. Betegnes den — x, er

$$x = \sqrt[5]{2{,}44537^2 - 0{,}44573^2} = \sqrt[5]{1{,}99964 \cdot 3{,}8911}$$

$$\log x = 0{,}17820;\ x = 1{,}5073;\ -x = -1{,}5073.$$

Geometri.

1. En Firkant ABCD er indskreven i en Cirkel; Siderne AB og DC forlænges, til de skære hinanden i O. Bevis, at Trekanterne OBC og ODA ere ligedannede, og find Længderne af OB og OC, naar

AB = 3″, BC = 2″, CD = 4″, DA = 5″.

2. Konstruer en Trekant, naar der er givet en af dens Vinkler, Højden paa et af Vinklens Ben og Radius til Trekantens omskrevne Cirkel.

3. En Korde deler en Cirkelperiferi i to Buer, af hvilke den ene er 3 Gange saa stor som den anden. Find Forholdet mellem Arealerne af de to Afsnit (Segmenter), hvori Cirklens Areal er delt.

Opløsning. 1. Da ∠ O er fælles, og ∠ OBC = 1 — ∠ CBA = ∠ ODA, er

$$\triangle OBC \sim \triangle ODA,$$

altsaa
$$\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{DA}.$$

Lad OB være x'', OC y''; ved Indsættelse af de opgivne Værdier faas da

$$\frac{x}{y+4} = \frac{y}{x+3} = \frac{2}{5},$$

hvoraf paa almindelig Maade

$$x = \frac{52}{21}, \; y = \frac{46}{21},$$

altsaa
$$OB = 2\tfrac{10}{21}'', \; OC = 2\tfrac{4}{21}''.$$

2. Den givne Vinkel være B, Højden AD. Man kan da straks konstruere Trekanten BAD; derefter bestemmes den omskrevne Cirkels Centrum som Skæringspunkt for to Buer med R til Radius og henholdsvis A og B til Centrum. BD's Forlængelse skærer Cirklen i C.

3. Buerne ere henholdsvis 270^0 og 90^0. Det lille Afsnit er

$$\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}, \text{ det store } \frac{3\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2}$$

$$\text{Forholdet } \frac{3\pi + 2}{\pi - 2} = 10, \text{ naar } \pi = \frac{22}{7}.$$

Praktisk Regning.

1. 1 Pund dansk Smør sælges i England for $1\frac{1}{2}$ sh. med en Fortjeneste af 20 pro Cent (af samtlige Udgifter). Sælgeren har betalt 3 d. i Told for hvert Pund og desuden haft Udgifter, der ialt beløbe sig til $6\frac{4}{5}$ pro Cent af Indkøbsprisen. Hvor meget har han givet i danske Penge for 1 Pund Smør?

$$1 \text{ sh.} = 12 \text{ d.} = 89 \text{ Øre.}$$

Opløsning. Er Indkøbsprisen x Øre pr. ℔, haves if. Opgaven

$$\left(x + \frac{34}{500}x + \frac{89}{4}\right) \cdot \frac{120}{100} = \frac{3 \cdot 89}{2}$$

$$\frac{534x}{500} + \frac{89}{4} = \frac{5 \cdot 89}{4}$$

$$x = \frac{500 \cdot 89}{534} = 83\tfrac{1}{3}.$$

at: $83\frac{1}{3}$ Øre.

3*

2. Hvor mange Kugler kan der støbes af 682 Centner Bly, naar de skulle passe til et Bøsseløb, hvis indvendige Diameter er 14 Linier, og der gaar 5 pro Cent til Spilde ved Støbningen?

Blys Vægtfylde er 11,4. 1 Kubikfod Vand vejer $\frac{31}{49}$ Centner. En Kugles Rumfang er $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($\pi = \frac{22}{7}$, r = Radius.)

Opløsning. Hver Kugles Volumen er $\frac{4}{3}\pi . 7^3 = \frac{22 . 4 . 7^2}{3}$ Kubiklinier og vejer $\frac{22 . 4 . 7^2 . 11{,}4 . 31}{3 . 49 . 12^6}$ Centner.

Det søgte Antal er da $\frac{682 . 95 . 3 . 49 . 12^6}{100 . 22 . 4 . 7^2 . 11{,}4 . 31} = 186624.$

Løste Opgaver.

41. Idet

$$(2n)^3 + (n + 1)^3 = a,\ (2n)^3 + (n - 1)^3 = b,$$
$$(2n^2)^3 + (n^2 + 1)^3 = c,\ (2n^2)^3 + (n^2 - 1)^3 = d,$$

skal det bevises, at

$$\frac{(a + b)(c + d)}{c} = n^3 + (2n)^3 + (3n)^3,$$
$$\frac{(3n + 1)\,c}{a} = (n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 + (n^2 - 1)^2.$$

Opløsning.

$$a = 9n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (3n^2 + 1)(3n + 1),$$
$$b = 9n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = (3n^2 + 1)(3n - 1),$$
$$c = (3n^4 + 1)(3n^2 + 1),$$
$$d = (3n^4 + 1)(3n^2 - 1).$$

Altsaa $a + b = (3n^2 + 1) . 6n$, $c + d = (3n^4 + 1) . 6n^2$,

$$\frac{(a + b)(c + d)}{c} = 36n^3 = n^3 + (2n)^3 + (3n)^3.$$
$$(n^2 + n)^2 + (n^2 - n)^2 + (n^2 - 1)^2 = 3n^4 + 1,$$

som netop er lig $\frac{(3n + 1)\,c}{a}$.

Derimod bliver (se den oprindelige Tekst)

$$\frac{(3n-1)d}{b} = \frac{(3n^4+1)(3n^2-1)}{3n^2+1}.$$

(O. A. Smith.)

106. Der er givet en begrænset Linie AB og paa den et Punkt C, samt en Linie L. At konstruere den Cirkel, der gaar gennem A og B og af L afskærer den mindste Korde.

Opløsning. Kaldes Cirklens Skæringspunkter med L for D og E, er

$$CD \,.\, CE = CB \,.\, CA = k^2.$$

Sættes nu $$CD + CE = l,$$

findes CD og CE som Rødder i den kvadratiske Ligning

$$z^2 - lz + k^2 = 0,$$

hvoraf $$z = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2},$$

altsaa $$\frac{l^2}{4} \geqq k^2,\quad l \geqq 2k.$$

Den mindste Værdi af l er da 2k, og for denne er

$$CD = CE.$$

C bliver altsaa Kordens Midtpunkt, hvorfor Centrum ligger i en Linie, vinkelret paa L i C.

(x.)

107. Trækker man fra Hjørnespidserne i et Tetraeder ABCD, hvis Sideflader ere ligestore, gennem et indvendigt beliggende Punkt P Linier, der skære de modstaaende Sideflader i A′, B′, C′, D′, saa er

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1.$$

Dette ønskes bevist.

Opløsning. Man fælder Højderne AE = BF = CG = DH = h, samt de vinkelrette fra P paa Sidefladerne, nemlig

$$PE_1 = h_1,\ PF_1 = h_2,\ PG_1 = h_3 \text{ og } PH_1 = h_4,$$

hvor E_1 ligger i samme Sideflade som E o. s. v. Kaldes Arealet af S[illegible] T, er

Find Stedet for Skæringspunktet mellem Linierne AC og BD, eller AD og BC. (117—118 af B—x.)

119. Givet en Cirkel og to Punkter M og N. Indskriv i Cirklen en Trekant ABC saaledes, at AB gaar gennem M, BC gennem N og AMNC bliver indskrivelig.

120. To Cirkler c_1 og c_2 skære hinanden i M og N. Læg en Trekant ABC ligedannet med en given $A_1B_1C_1$ saaledes, at B falder paa c_1, C paa c_2, AB gaar gennem M og AC gennem N.

121. Givet en Cirkel og en ret Linie. Find i denne et saadant Punkt, at to Linier, som trækkes derigennem i givne Retninger, skære Cirklen i diametralt modsatte Punkter.

122. Indskriv i en Firkant en Halvcirkel, som rører de to Sider og har Diameterens Endepunkter paa de andre to.

(119—122 af P. A. Larsen.)

123. Vis, at Ligningen

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 =$$
$$3(x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$$

ikke har andre reelle Løsninger end

$$x = \pm y = \pm z.$$

124. a, b og c ere Sider i en Trekant, x, y og z ere tre Tal, hvis Sum $x + y + z$ er positiv. Bevis, at Produktet $x \,.\, y \,.\, z$ er negativt, dersom

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0.$$

125. I enhver Trekant ABC er

$$(a \operatorname{tg} B - 2r)(b \operatorname{tg} C - 2r)(c \operatorname{tg} A - 2r) =$$
$$(a \operatorname{tg} C - 2r)(b \operatorname{tg} A - 2r)(c \operatorname{tg} B - 2r)$$

og $(a \operatorname{tg} B - 2\gamma)(b \operatorname{tg} C - 2\alpha)(c \operatorname{tg} A - 2\beta) =$

$$-(a \operatorname{tg} C - 2\beta)(b \operatorname{tg} A - 2\gamma)(c \operatorname{tg} B - 2\alpha),$$

idet r er Radius i den indskrevne Cirkel, α, β og γ Radierne i de udvendige Røringscirkler. (123—125 efter Mathesis.)

Bemærkninger til „To officielle Skrivelser".

Af Julius Petersen.

Rektor Krygers og Kand. mag. Nielsens Anmeldelser af de i de to Skrivelser omtalte Lærebøger synes at gjøre enhver videre Omtale af disse overflødig; da Forff. imidlertid have offentliggjort deres Skrivelse uden at ledsage den med Indrømmelser, maa jeg antage, at de endnu staa uforstaaende overfor de fremførte Anker, og at en mere udførlig Paavisning af Fejlene er nødvendig.

Mine Anker have naturligvis ikke alle samme Vægt; de mindre betydende bidrage imidlertid sammen med de mange alvorlige til at give et Helhedsbillede af Bøgerne og til at vise min Berettigelse til at kalde den hele Fremstilling for afjadsket. Jeg har taget dem, hvor de faldt mig i Øjnene, saa at de kun ere at opfatte som Prøver; dette kan ses deraf, at de ovennævnte Anmeldelser have en Mængde berettigede Anker, som jeg ikke har nævnt.

Geometrien.

1. Jeg har ikke anket over, at Forff. bruge Ordet Retning, men over den Maade, paa hvilken de benytte det. Naar de betænke, at en Dreng efter deres Forklaring kan forandre Rummets Hovedudstrækninger ved at dreje sig lidt og den Forlegenhed, han kan sætte dem i ved at spørge dem om, hvor et Ikosaeder, en Stump Kridt eller lignende har sine Hovedudstrækninger, saa ville de vist indse, at Anken er berettiget.

Forff. have misforstaaet Betydningen af det stereometriske Forkursus (hvis Nytte jeg forøvrigt anser for tvivlsom); hverken det eller Regneundervisningen kan fri den følgende Matematikundervisning for et eneste Bevis, fordi de ifølge Sagens Natur maa hjælpe sig med løse »Forklaringer«.

[illegible] Terning har 6 Sideflader; det benyttede Udtryk

5. Hvorfor Forff. først ville give en meningsløs Definition af Røring, naar den rigtige er saa let, forstaar jeg ikke. Hvad Forff. mene med at forlænge en vilkaarlig i Planen eller Rummet henkastet, krum Linie, der ikke følger nogen bestemt Lov, er mig ganske ubegribeligt.

7. Definitionen af »geometrisk Sted« hører til de grove Fejl; Forff. Forsøg paa at vælte den over paa mig lykkes ikke; selv om de ville anse min Bog som Norm, hvad Omfanget angaar, kunne muligvis deri forekommende Fejl dog vel ikke tages som Norm for, hvorledes Beviser skulle føres. Heldigvis blive imidlertid Forff. i udelukkende Besiddelse af Fejlen; jeg har den rigtige Definition og kan derfor godt i Anvendelserne lade Eleverne gaa lidt paa egen Haand efter de givne Anvisninger; giver man derimod som Forff. en gal Definition, maa de derpaa byggede Beviser ogsaa blive gale. Jeg har kun nævnt de to Anvendelser for at vise, at Fejlen ikke hidrører fra en tilfældig Forglemmelse.

8 og 9. Det er meget vanskeligt at kritisere disse Stykker, da det hele danner et Sammensurium, hvor man ikke ved paa hvilket Punkt man skal tage fat. Jeg vil gribe lige for Haanden og tage følgende Passus:

»Da Størrelsen af de Buer, ethvert Punkt i Linien saaledes beskriver, bestemmer Størrelsen af den fremkomne Vinkel, kan man skaffe sig et Maal for Vinklen ved at maale Buen.«

Hvis her er nogen Mening i den Henvisning, der ligger i Ordet »Da«, maa Ordet »bestemmer« betyde, at Buen vokser samtidig med Vinklen. Dette vilde imidlertid ogsaa gælde, hvis Buen var f. Eks. en Ellipsebue, og den kunde dog ikke bruges til Maal for Vinklen. Sagen er, at hvis Ordet »bestemme« skal kunne benyttes til noget, maa der vises, at Buen vokser proportionalt med Vinklen, eller, at lige store Buer svare til lige store Vinkler, men derom staar der ikke et Ord.

15—19. Hvis Forff. ikke ved at læse Anmeldelserne ere komne til Erkendelse af, hvor umuligt dette Afsnit er, har ikke noget Haab om at kunne bringe dem til at inds-

Jeg har saa meget større Grund til undgaa en nærmere Undersøgelse, som Forff. ikke støtte sig til noget egentligt Forsvar, men til en obskur tysk Lærebogs Autoritet (Jeg har aldrig før hørt Forfatterens Navn og er dog meget godt bekendt med den tyske matematiske Verden). Forff.'s Tro paa den preussiske Kontrol med Matematikundervisningen er ilde anbragt. Kontrollen føres af en »Schulrath«, der saa godt som altid er Filolog. Ved Eksamen stiller Læreren selv Opgaver og Spørgsmaal, Censorerne bestaa af Schulrath, Rektor, der altid er Filolog, og alle Lærerne i Prima. Naar hertil føjes, at Eksaminationen foregaar med et Hold Elever paa een Gang, vil man let indse, at Kontrollen er ganske betydningsløs.

37. Et mærkeligt Forsvar.

40. Anken hører til de mindre vigtige, men Forsvaret er værre end Fejlen. Naar man skal konstruere en Figur af nogle Sider og Vinkler, skal man ikke konstruere disse Sider og Vinkler, der ere givne, men man skal sætte dem sammen. Om dette altid kan gøres ved Passer og Lineal, det vide D'hrr. sikkert ikke.

Jeg skal endnu blot omtale Bemærkningerne om Cirkelperiferiens Længde; jeg har her sagt, at Forff. forveksle det, at den ind- eller omskrevne Polygons Perimeter nærmer sig til Periferien i Beliggenhed med at den nærmer sig til Periferien i Længde. De svare, at de naturligvis tale om Perimetrens Længde, og det har jeg heller ikke tvivlet om. De tale om Længden af en Perimeter, som faar flere og flere Punkter fælles med Periferien, men de vise ikke, at denne Længde har noget at gøre med Periferiens Længde. De betragte det aabenbart som selvindlysende, at to Linier, der i hele deres Udstrækning have uendelig mange uendelig nær ved hinanden liggende Punkter fælles, maa have samme Længde, men denne Sætning er saa langt fra at være selvindlysende, at den er fuldstændig falsk. Del en ret Linie i et vist Antal lige store Dele og beskriv over hver Del en Halvcirkel, afvekslende opefter og

1 fremkommer en krum Linie, der er $\frac{\pi}{2}$ Gange

saa lang som den rette. Bliv nu ved med at fordoble Delenes Antal; derved nærmer den krumme Linie sig saa meget som man vil i Beliggenhed til den rette, men dens Længde er stadig $\frac{\pi}{2}$ Gange dennes.

D'hrr. se heraf, at man ikke kan lade Uligheden (1) i 104 falde ned fra Luften.

Algebra.

Ieg skal her, idet jeg forøvrigt henviser til Anmeldelsen, nøjes med nogle enkelte Bemærkninger.

14. Forft. mene, at de have gjort vel i at samle alle Smaasætninger i Addition og Subtraktion i eet Bevis; det er atter et Eksempel paa Forff.'s sædvanlige Sammenblanding af Begreber. Ulykken er netop den, at de ikke have Spor af Bevis. De opfordre Eleven til ved nogle Eksempler at prøve om ikke de opstillede Formler stemme; det er forøvrigt en aldeles overflødig Paavisning, thi der er ingen af Eleverne, som ikke hundrede Gange i sit Liv har anvendt de opstillede Formler i Praksis.

29. Paa samme Maade forholder det sig med Sætningen om Divisjon med et Produkt, der med en lille Omskrivning opstilles som »selvfølgelig«. Hvorfor gøre Forff. sig egentlig den Ulejlighed at bevise Sætningen om Multiplikation med et Produkt, der dog maa være ligesaa selvfølgelig?

38. Forff. indrømme, at der i Afsnittet om Tals Delelighed mangler en Sætning (der mangler for Resten adskillige), men de gøre dette paa en Maade, der bringer mig til at tvivle om, at de forstaa Sætningens Betydning. En Sætning, der staar isoleret, kan udelades uden videre Skade, men den her manglende Sætning kan ikke udelades, uden at meget af det følgende kommer til at svæve i Luften. Er der Lærere, der have den Sædvane at udelade den, ville de gøre vel i at gaa over til en anden.

43. Om denne Sætning fortalte en bekendt Lærer

en Dag, at han havde eksamineret i den en Snes Gange ved Universitetet, men ikke en eneste Gang faaet en tilfredsstillende Besvarelse. Han havde da hver Gang bedet Kandidaten sige til sin Lærer, at denne ikke selv forstod Beviset. Jeg er bange for, at hvis Forff. havde havt en Elev oppe i denne Sætning ved Universitetet, vilde Eleven have havt et Bud med hjem til dem.

56. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ er en Ligning mellem $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$, men det er ingen Proportion.

71. Forff. vise, at $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^n$, naar $a > b$ og slutte deraf $\left(\frac{a}{b}\right)^\infty = \infty$; de mene, at denne Slutning er tilladelig i Henhold til deres Definition af ∞. Fejlen liggger dog nær nok; de definere meget rigtigt ∞ som en Størrelse, der vokser uden Grænse, men om Potensen vise de kun, at den er voksende; de maa dog vide, at en Størrelse godt kan vokse uendelig ofte, uden derfor at blive uendelig stor.

Man ser, at Forff. i al Fald have ført eet Bevis upaaklageligt, nemlig Bevis for, at de mangle Evne til skarp Begrebsopfattelse; naar to Begreber udtrykkes ved Ord, der ligne hinanden, ere de for dem identiske. At vokse uendelig mange Gange er for dem det samme som at vokse uendelig meget, at nærme sig i Beliggenhed det samme som at nærme sig i Længde, at vokse samtidig det samme som at vokse proportionalt o. s. v. Det bekendte Bevis for, at en Kat har tre Haler, maa for dem være et uforkasteligt Bevis. (Ingen Kat har to Haler, en Kat maa have een Hale flere end ingen Kat, altsaa o. s. v.).

Et andet Eksempel har man i Forff. jævnlige Brug af Ordet »elementær«. En elementær Matematikundervisning er en Undervisning i de første Elementer, men ikke en Under-
er kan benytte falske Definitioner og Beviser.
r, at Forff. nu kunne indse, at Bøger, i hvilke

der hersker en saa gennnemgaaende Begrebsforvirring, ikke kunne tjene til at skærpe Elevernes Begrebsopfattelse, og at Bøger, der ere saa fulde af Fejl, maa ødelægge Eksamen for mange flinke Elever; den, der leverede mig det i Anmeldelsen omtalte Bevis for en Sætning om Decimalbrøker, vilde jeg ubetinget give Slet.

Forff. gøre sig megen Umage for at vise, at jeg ikke har været berettiget til at tale om deres frimodige Benyttelse af mine Bøger. Jeg skal ikke opholde mig videre herved; da Bøgerne foreligge, kan enhver selv danne sig en Mening herom.

Til Lærebogsspørgsmaalet.

Af J. P. Gram.

De Herrer, som have taget Ordet i den Diskussion, der er ført angaaende de meget omtalte Lærebøger af S. A. Christensen, Knud Christensen og K. Schmidt, have med en sjelden Enstemmighed været enige om at udtale en afgjort Fordømmelsesdom over disse Bøger. Jeg tvivler ikke om, at Dommen vilde være falden lige saa stærk, selv om ikke Professor Jul. Petersen var gaaet i Spidsen med sin Indstilling om at forbyde Brugen af de nævnte Lærebøger, og det er slet ikke min Hensigt at opkaste mig til Forsvarer af dem. Men jeg skal ikke nægte, at den Kritik, der er rejst af disse Bøger, synes mig i høj Grad ensidig, ja i visse Henseender af en Art, som, hvis den anvendtes paa adskillige andre af de Lærebøger, som i Tidens Løb have set Lyset, vilde falde i høj Grad ufordelagtig ud for disse. Det er jo dog ikke saa vanskeligt endog i de bedste Lærebøger at finde Pletter, som skjæmme Fremstillingen, Unøjagtigheder, som burde være undgaaede, mindre heldig Ordning af Stoffet osv., altsammen Ting, som kunne være meget uheldige, men derfor ikke just gjøre en F

ubrugelig. Anlægges der paa saadanne Fejl en lignende Maalestok, som den, man har anvendt overfor »Odensebøgerne«, saa turde Prøven i adskillige Tilfælde faldt ret uheldig ud. Men en saadan Prøve er ej heller ganske tilladelig. For at tage et Eksempel, som i denne Sammenhæng ligger nær, saa manglede i den ældste Udgave af Professor Petersens Geometri en saa vigtig Sætning som den ptolomæiske, dette forhindrede ikke, at Bogen blev almindelig anvendt, uagtet enhver vil indrømme det var en Mangel; lige saa lidt forringer hans vel knappe Fremstilling af Læren om Trekanters Kongruens, som ikke vil kunne staa sin Prøve overfor en skarp Kritik, i nogen mærkelig Grad denne Bogs Værd, fordi Manglen lader sig supplere uden Vanskelighed, og selve det Kriterium paa Kongruens, der er benyttet, i og for sig fortjener at fremdrages. Nej! det er, naar det kommer til Stykket, ikke saadanne enkelte Fejl, som en stor Del af de af Kritikerne paapegede, der fælde de meget omtalte Lærebøger. Man kunde jo tænke sig, at Forfatterne foranstaltede en ny Udgave, omarbejdede enkelte Afsnit og rettede de paaviste grove Fejl. Det var slet ikke saa vanskeligt, selv i et saa mislykket Afsnit som det stærkt fremhævede om Paralleltheorien er det i Virkeligheden ikke Grundlaget men den jaskede og ulogiske Fremstilling, der volder Ulykken, og en Rettelse var vel gjørlig, uden at Bogen iøvrigt undergik stor Forandring. — Blev Sagen derfor væsentlig bedre? For mit Vedkommende vil jeg ikke tage i Betænkning at svare et rent Nej. — Man kan ikke for stærkt fremhæve, at en Lærebog skal være korrekt i sine mindste Detailler og omhyggelig i sin Fremstilling, og Fordringerne bør stilles desto højere, jo mere bekjendte Ting det drejer sig om at fremstille. Men dette er ikke alt. Der maa mere til for at give dens Fremkomst nogen Berettigelse. Vi have i Virkeligheden allerede en ret betydelig Række af elementær matematiske Lærbøger til vor Disposition, adskillige af dem ere særdeles brugbare, enkelte anerkjendt fortræffelige, og der er tilstrækkelig megen Forskjel imellem dem, til at Lærere have et Valg. Lad være, at

muligvis ingen af dem helt tilfredsstiller den enkelte Lærer, at der er adskillige Ting, han kunde ønske anderledes og som han personlig mener at kunne gjøre bedre. Derfor skal han ikke strax tro, at han bør sætte sig ned og skrive en ny Lærebog. Dette er noget, som virkelig er et saare vanskeligt Stykke Arbejde, og fordi han er en flink Lærer, bliver han ikke ogsaa strax en udmærket Lærebogsforfatter. Lad ham hellere indskrænke sig til at korrigere og forbedre paa enkelte Punkter, det kan uden stor Vanskelighed gjøres ved den mundtlige Undervisning, og dertil behøves der virkelig ingen ny Lærebog. Tvertimod, den dygtige Lærer vil stadig have in mente, at det ikke kommer an paa, om han slavisk holder sig til Bogens Ord, men vil snarere forstaa at benytte Bogen som Ledetraad og Grundlag, saaledes at Eleverne ikke blot lære »Bogen« som saadan, men meget mere tilegne sig det Stof, som Bogen paa sin Vis giver en Fremstilling af. Jo mere kortfattet Bogen er, jo mere den indskrænker sig til at give det væsentlige, desto friere stilles Læreren overfor den og desto lettere vil den ogsaa kunne anvendes. Men det er desværre en bekjendt Sag, at mange Lærere have ondt ved at vise den Resignation, der bestaar i at lade sit eget komme i anden og ikke i første Række, og der er i Lærebogslitteraturen i Almindelighed alt for meget af, hvad der maa betegnes som blot og bar Industri uden at være forbundet med det fornødne Talent. Stadig højere lyde Klagerne fra Forældrenes Side over de »nye« Bøger, »forbedrede« og »forøgede« Udgaver af de ældre osv. osv., og skal man end ikke lægge alt for megen Vægt paa saadanne Klager, saa tror jeg dog nok, at man godt kan erkjende, at der ogsaa af dette Hensyn bør vises nogen Resignation fra Pædagogernes Side.

Jeg kan ikke undlade at fremkomme med disse Betragtninger, fordi de omtalte Lærebøger alt for meget bære Præget af, at Forfatterne ikke har villet vise denne Resignation. Man har kjendt, at Professor Petersens Lærebøger, som jo nu re fortrængt alle andre, ikke ere ful le

Henseender, og at der ogsaa burde være Plads for andre. Saa skrive D'hrr. altsaa nye. Dertil er intet at sige, naar de gjøre deres Sager godt. Kritiken har vist, at Udførelsen er daarlig, at der er svære Fejl i Fremstillingen og saadanne Forsyndelser imod Logiken, som burde være enhver mathematisk Lærebogsforfatter umulige. De have altsaa ikke vist sig denne Opgave voxne.

Men man kunde endda have baaret over med Manglerne og set skaansomt paa Fejlene, hvis der bag ved det hele laa en virkelig god Ide, som man havde villet gjennemføre, men hvis Udførelse var bleven mindre tilfredsstillende. Men man vil vistnok forgjæves spejde efter en saadan. Tager man f. Ex. de geometriske Lærebøger af Oppermann, Ramus, Mundt, Steen og Jul. Petersen, saa vil man endog blot ved et flygtigt Øjekast overbevise sig om, at hver af dem har sine specifike Ejendommeligheder, de repræsentere helt forskjellige Maader at se og angribe Sagen paa, men hvad karaktiserer D'hrr. Christensen og Schmidts Geometri? Jeg maa give Prof. Petersen Ret i, at der i Anordningen og Synsmaaderne er grumme lidt originalt, og hvor der engang imellem er Tilløb til noget saadant — som i Paralleltheorien — der er det saa daarlig gjort som vel muligt. Og noget lignende gjælder om Arithmetiken. Hvad bliver der saa tilbage? Intet, slet intet, andet end det rent industrielle, og dette er dog noget lidt. Jeg venter strax den Indvending fremsat, at man paa et saa fortærsket Omraade som den mest elementære Del af Mathematiken ikke kan gjøre store nye Opdagelser, man maa væsentlig indskrænke sig til en Reproduktion af det gamle. Det er rigtigt, men alligevel kun den halve Sandhed. Vi er jo dog kommen bort fra Euklid, skjønt han i Henseende til Stringens staar som den uovertrufne, og selvfølgelig er det, hvortil vi nu ere naaede, ingenlunde at betragte som Endemaalet. Der er altid nye Synspunkter, der kan gjøres gjældende, saavel i hele Anlæget, som overfor enkelte Problemer. Jeg skal ikke gaa nærmere ind paa selve de Axiomer, hvorpaa hele Bygningen

hviler, en Uddybning af disse har ikke sin rette Plads ved Undervisningens Begyndelse, der gjælder det meget mere hurtigst muligt gjennem Brug af Erfaring og Anskuelse at faa et foreløbigt Grundlag, som er solidt nok til at kunne bruges, saalænge til Eleverne faa Forudsætninger og Modenhed nok til at kunne kritisere selve dette Grundlag, og skal der overhovedet i den elementære Mathematik gaas ind paa Drøftelsen af Axiomerne, saa maa denne komme som Slutningen og ikke som Begyndelsen. Men der er nok endda, og jeg skal ganske kort henlede Opmærksomheden paa nogle faa Punkter til Overvejelse for fremtidige Lærebogsforfattere.

Vende vi os først til Arithmetiken, saa har denne Disciplin et dobbelt Formaal, dels at levere Eleven Beviserne for Rigtigheden af de bekjendte elementære Operationer med Tal og med andre af dem afledte Operationer, dels at indøve ham i Brugen af det mathematiske Tegnsprog. Men medens den første af disse Opgaver er et i sig fuldgyldigt Endemaal, er Tegnsproget i og for sig kun et Middel, hvis Betydning bliver desto større, jo mere Brug Eleven faar derfor i Fremtiden. Heraf følger, at det sidste ikke bør være Hovedsagen for det store Flertal, særlig ikke i Begyndelsen. Men nu er det iøjnefaldende, at der er en stigende Tendens til at skyde Anvendelsen af Regning med Bogstavstørrelser frem i forreste Række, at basere Beviserne paa den og kun bruge numeriske Exempler til Illustration. Dette synes mig at være en Misforstaaelse. Det er fuldstændig ligesaa godt at bevise en Sætning ved Hjælp af Operationer med vilkaarlig valgte Tal, naar Beviset føres saaledes, at Operationernes Almengyldighed bliver Eleven indlysende; saaledes har man jo gjort adskillige Sekler før Bogstavregningens Opfindelse, og i mange Tilfælde er det for Eleven langt forstaaeligere. Det kommer netop i den elementære Arithmetik meget mere an paa at indøve visse Fremgangsmaader end at udvikle Formler, og meget af den Formelgymnastik, som nutildags drives i Skolerne, kunde overmaade godt spares, naar den erstattedes med en stadig An-

vendelse af Talexempler. Exempler ville bedst illustrere min Tanke. En Sætning som $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ har i den elementære Arithmetik den største Betydning netop ved at lette en Multiplikation eller en Logarithmeregning, den algebraiske Betydning kommer først frem ved Ligningernes Behandling. Sætningerne om Potens og Rod og de forskjellige Reduktioner, som disse kunne give Anledning til, komme særlig til Anvendelse overfor numeriske Størrelser, og en saa gammel og i og for sig smuk Sætning som Formlen for Ophævelsen af dobbelt Irrationalitet, kan paa dette Standpunkt kun rettelig vurderes, naar Anvendelsen paa Talstørrelser gjøres til det principale. Ja selv ved Opløsning af en numerisk Ligning af 2den Grad, som nu altid foretages paa den Maade, at de givne Talstørrelser indsættes i den almindelige Formel, turde det være nok saa hensigtsmæssigt at indøve den Fremgangsmaade, som fører til Formlen, og uden at bryde sig om denne anvende disse Operationer i hvert enkelt Tilfælde, hvor en forelagt Ligning skal løses. Da faar man en Regel, som engang lært bestandig vil huskes, selv om den almindelige Formel er glemt for længe siden.

Saa er der Logarithmeregning, Indførelsen af Antilogarithmer, Anvendelser paa Rentesregning og Annuiteter. Skulde det mon ikke ogsaa der være saare praktisk at drage Taloperationerne langt mere i Forgrunden end sædvanlig sker, kort sagt at sætte Mathematik og Regneundervisning i en ganske anderledes intim Forbindelse end vore Lærebøger pleje? Jeg er saa heldig paa dette Punkt at være i Overensstemmelse med en Strømning i Tiden, som vel endnu kun er kommen frem sporadisk — bl. a. ogsaa i en Artikel af Tidsskriftets Redaktør Hr. cand. Foldberg (se 1ste Aargang S. 129) — men som aabenbart vinder mere og mere Tilslutning, og det kunde for en Gangs Skyld være ganske rart at se en Lærebog udarbejdet fra dette Synspunkt. — Og for at nævne noget andet, mon ikke den sædvanlige Proportionslære skulde være noget forældet, og mon ikke det ogsaa var Umagen værd at

skjænke Overgangen fra rationale til irrationale Tal en noget større Opmærksomhed end i Almindelighed sker.

Og vende vi os dernæst til Geometrien, saa har Prof. Petersen der med megen Styrke fremdraget det konstruktive Moments Betydning, Geometrien staar jo ogsaa til Tegning i en lignende Rapport som Arithmetik til Regning. Men forøvrigt staar vor elementære Geometri endnu i visse Henseender paa Euklids Standpunkt. Jeg sigter til alt, hvad der angaar geometriske Størrelsers Forhold til de rene Tal. For Euklid existerede der paa dette Omraade Vanskeligheder overfor de irrationale Tal, som ikke findes for os. Hvorfor skulle vi da ikke drage Fordel af vor forøgede Kundskab. Hvorfor skulle vi vedblivende i Læren om ligedannede Trekanter og hvad dermed staar i Forbindelse, ikke begynde med en solid Undersøgelse af Rumstørrelsens Maaling og anvende denne til Simplifikation af Fremstillingen. At der kan gjøres noget i denne Retning har Oppermann vist, og hans Methode er ikke den eneste mulige. Jeg anser det sædvanlige Bevis for Transversalsætningen for en Antikvitet, og de geometriske Regneoperationer (Konstruktion af 4de Proportional, Mellemproportional osv.) komme ej heller i de gængse Fremstillinger ganske i det rette Lys. De staa i vor Geometri mere som Rudimenter af en hel Bygning end som noget, der har virkelig Betydning, hvad de selvfølgelig stadig have. Ogsaa maa det erindres, at geometriske Beregninger give rig Anledning saavel til gode Talexempler, som kunne komme til Nytte i det praktiske Liv, især naar en Kordetavle benyttes til Hjælp, som til Indførelse af Regning med Bogstavstørrelser, hvilke i Virkeligheden have nok saa megen Anvendelighed her som i den elementære Arithmetik. Ja selv ved Løsning af geometriske Konstruktionsopgaver maa Omforming til algebraiske Problemer, som i Professor Petersens Bøger er traadt noget i Baggrunden, ikke forsømmes; der gives virkelig Tilfælde, da netop denne Fremgangsmaade giver en Konstruktion, som ad anden Vej kan være saare vanskelig at finde.

Som man af disse flygtige Antydninger vil skjønne, er der dog nogle Punkter, hvor der kan være Tale om at gjøre Afvigelse fra det engang tilvante. Man vil muligvis kunne finde andre, men D'hrr. fra Odense have i Grunden ingen fundet. Derfor var deres Lærebøger i heldigste Tilfælde overflødige, eftersom de ikke vilde betegne noget Fremskridt, og naar tilmed Formen af det deri givne er saa ufuldkommen som af andre paavist, saa er dermed Dødsdommen over Bøgerne fældet og vilde snart være fældet, selv om den ikke var givet ved et Magtsprog.

Danske Eksamensopgaver.

Almindelig Forberedelseseksamen, Marts 1892.

Geometri.

1. Arealet af en regulær Ottekant er $1'\square$. Hvor stor er den indskrevne Cirkels Radius?

2. En Cirkel er indskreven i et Cirkeludsnit; bevis, at Cirklen rører Udsnittets Bue i dennes Midtpunkt.

Hvorledes konstrueres Cirklen, naar Udsnittet er givet?

3. I en Trekant ABC ere Aa og Bb Højder; bevis, at $\angle ABb = \angle Aab$.

Opløsning. 1. Kaldes den omskrevne Cirkels Radius r', den indskrevnes ϱ', bliver Ottekantsiden $k' = r' . \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, Firkantsiden $K' = r' . \sqrt{2}$, altsaa

$$2rK = 1 = 2r^2 \sqrt{2},$$

$$r = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}.$$

Dernæst $$\varrho = \frac{r}{2} \sqrt{4 - \left(\frac{k}{r}\right)^2} = \frac{r}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{4} = \text{c. } 0{,}55.$$

2. Den indskrevne Cirkels Centrum ligger i Centervinklens Halveringslinie, der altsaa bliver Centerlinie for de to Cirkler og følgelig gaar gennem deres Røringspunkt; dette bliver derfor Buens Midtpunkt.

Den søgte Cirkel bliver indskreven i den Trekant, der dannes af Radierne (forlængede) og Tangenten til Buen i dens Midtpunkt.

3. Cirklen over AB som Diameter gaar gennem a og b; $\angle$ ABb og $\angle$ Aab ere Periferivinkler, der spænde over samme Bue i denne Cirkel og altsaa lige store.

Aritmetik.

1. Find x og y af Ligningerne

$$3x^2 - 2y^2 = 6,$$

$$\sqrt{3} . x + \sqrt{2} . y = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

2. En 25 Aar gammel Mand arver en Sum Penge, som han anbringer til $3\frac{4}{5}$ p. Ct. p. a. Rente og Rentes Rente. Hvor gammel er Manden, naar den aarlige Rente er vokset til 19 p. Ct. af den oprindelige Kapital?

3. Træk

$$\frac{x + 2}{2x^2 - 7x + 3} - \frac{x - 3}{2x^2 + 3x - 2}$$

sammen til een Brøk og bring denne paa den simpleste Form.

Opløsning. 1. Divideres den første Ligning med den anden, faar man

$$\sqrt{3} . x - \sqrt{2} . y = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}.$$

Ved at addere denne til eller subtrahere den fra den anden faas

$$x = \sqrt{6} = y.$$

2. Det søgte Alderstal x bestemmes af Ligningen

$$1{,}038^{x-25} . 0{,}038 = 0{,}19,$$

$$1{,}038^{x-25} = 5,$$

$$x - 25 = \frac{69897}{1620} = 43{,}146$$

$$x = 68{,}146.$$

Naar Manden er 68 Aar, er den aarlige Rente næsten 19 p. Ct. af den oprindelige Kapital; venter han til 69 Aars Alderen, er den over 19 p. Ct. (c. 19,6).

3. Nævneren opløses paa almindelig Maade i Faktorer, hvorved Brøkerne omskrives til

$$\frac{x+2}{(2x-1)(x-3)} - \frac{x-3}{(2x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{10x-5}{(2x-1)(x-3)(x+2)} = \frac{5}{x^2-x-6}.$$

Praktisk Regning.

1. En Mand betaler en Gæld paa 30000 Kr. med [1]) en Sparekassebog, hvorpaa er indsat 12375 Kr., der have staaet i 7 Aar og 39 Dage; Renten er $1\frac{3}{4}$ p. Ct. halvaarlig, der lægges til Kapitalen; for de 39 Dage beregnes simpel Rente, idet Aaret regnes til 360 Dage.

[2]) 9200 Kr. i $3\frac{1}{2}$ p. Ct.'s Obligationer, hvis Kurs er 91,75 (Værdien af hvert Hundrede, som Obligationen lyder paa). Med Obligationerne følger simpel Rente for 39 Dage (Renten beregnet af den paalydende Værdi).

[3]) Kontante Penge. Hvor mange?

Opløsning.

[1]) $12375 \cdot 1{,}0175^{14} = 15775{,}00$

$$\frac{15775 \cdot 7 \cdot 39}{200 \cdot 360} = 59{,}81$$

Kr. 15834,81

[2]) $9200 \cdot \frac{91{,}75}{100} = 8441{,}00$

$$\frac{9200 \cdot 7 \cdot 39}{200 \cdot 360} = 34{,}88$$

Kr. 8475,88

Kr. 24310,69

Saldo Kr. 5689,31

Kr. 30000,00.

2. En Møllesten er 3 Alen i Diameter, 10 Tommer tyk og vejer 3947 Pund. Hullet har kvadratisk Gennemsnit. Hvor stor er Kvadratets Side?

Stenens Vægtfylde er 2,8; $\pi = \frac{22}{7}$. En Kubikfod Vand vejer 62 Pund.

Opløsning. Er Kvadratets Side x Fod, har man

$$\left(\frac{22}{7} \cdot 9 - x^2\right) \cdot \frac{5}{6} \cdot 2{,}8 \cdot 62 = 3947$$

hvoraf

$$x^2 = \frac{22 \cdot 9}{7} - \frac{3 \cdot 3947}{31 \cdot 14}$$

$$= \frac{435}{434} = 1{,}0023$$

$$x = 1{,}001.$$

Hullet er meget nær 1 Fod i Kvadrat.

En „simpel og korrekt" Definition.

Af Chr. Hansen.

Efter hvilken af de ikke faa i min Skoletid (1850—59) i Brug værende Geometrier man end læste, var der dog eet, som man dengang altid lærte ens, nemlig at parallele Linjer ere to rette Linjer i samme Plan, der, hvor langt de end forlænges, ikke skære hinanden. Glemte man at medtage et eneste af denne Definitions tre Led, f. Eks., hvad der lettest kunde ske, det mellemste, da fik man for sin ufuldstændige Definition en simpel Karakter og i Gentagelsestilfælde ikke sjældent en Lussing i Tilgift. Det var dog ikke alene med at huske Definitionens tre Led, man havde sit Besvær, men tillige og mest med at blive bevandret i »ensliggende og uensliggende Vinkler«, »indvendige og udvendige Vekselvinkler«, »indvendige og udvendige samsidige Vinkler« og »korresponderende Vinkler«. Ja det var virkelig dengang en drøj Tur at komme igennem Parallelteorien. En af mine Legekammerater fra en anden

Skole fortalte mig endog, at Eleverne der puttede under Trøjen en Bog op paa Ryggen for at skaane lidt paa denne, naar de skulde op i Parallelerne.

Nu derimod er det hele en smal Sag, ja nu er Parallelteorien næsten det korteste og letteste Afsnit af hele det elementære Kursus i Plangeometri; thi den ældgamle Definitions to første Led ere strøgne som overflødige, idet man een Gang for alle siger, at alle Linjer ligge i samme Plan, saa længe man er i Plangeometrien, og at man i Stedet for Ordene »ret Linje« bruger Ordet »Linje«, naar det ikke kan misforstaas. Dog dette er langt fra at være den hele Ballast, man har kastet over Bord i Parallelteorien; man har tillige strøget al den gamle vidtløftige Passiar om de otte Vinkler med de mange forskellige Navne. Nu taler man kun om »ensliggende« Vinkler og forstaar derved Vinkler »som u og v eller p og q« (angivne paa en Figur), eller med andre Ord man betjener sig i Definitionen paa Paralleler af et Begreb (ensliggende Vinkler), som man ikke definerer men bibringer Eleverne ostentativt. At definere saaledes til Dels ostentativt anses af nogle — ikke af mig — for at være i pædagogisk Henseende fortrinligt, men det er et farligt Vovestykke at lade trykke en Definition, der betjener sig af et ikke defineret Begreb; thi det er jo overfor de eksakte Videnskaber en Pligt for deres Dyrkere at protestere mod ueksakte Definitioner. Et Par Forfattere have nylig vovet at definere Paralleler ved Hjælp af det ikke definerede Begreb »Retning« og ere gaaede ostentativt til Værks ved Hjælp af en Tegnetrekant og en Lineal, hvilket Vovestykke da ogsaa har paadraget dem en Strøm af Tilrettevisninger. En af disse ender (Tidsskriftets Afd. A for 1891 Side 119) saaledes: »var det taget med, havde man faaet den simple og korrekte Definition paa parallele Linjer, at det er to Linjer, der danne samme Vinkel til samme Side med en tredje«.

Denne Definition, der kaldes »simpel og korrekt«, hviler paa Begrebet »Vinkler til samme Side« og altsaa ligesom den af de under kritisk Behandling tagne Forfattere opstillede paa

et ikke defineret Begreb. Hvad er Vinkler til samme Side? Til samme Side for hvad? Eller er det (jfr. Oppermann Side 23 L. 3—4 f. o.) Begrebet »Retning«, der her optræder inkognito?

Lad AB og CD være to rette Linjer i samme Plan, skaarne af en tredje EFGH henholdsvis i F og G. Ere nu saadanne to til samme Side (for EH) liggende Vinkler som AFH og CGE lige store, da ere AB og CD ikke parallele, undtagen de nævnte Vinkler ere rette; og ere saadanne to til samme Side (for AB og CD) liggende Vinkler som AFH og DGH lige store, da ere atter AB og CD ikke parallele, undtagen Vinklerne ere rette. Ere derimod to Vinkler som AFH og CGH, der ligge til samme Side for AB og CD og tillige til samme Side for EH, lige store, da ere AB og CD omsider parallele. Men en Definition, som indeholder et Udtryk, der kan forstaas paa tre Maader, af hvilke de to vise sig at være gale, vil næppe af andre end dens Opfinder blive kaldt »simpel og korrekt«.

Løste Opgaver.

Af P. H.

110. Konstruer en Trekant af a, A og Produktet af de Stykker, hvori h_b deler b.

Opløsning. Over a som Diameter tegnes en Halvcirkel; tillige konstrueres Trekantens omskrevne Cirkel. Fodpunktet af h_b bestemmes da som Skæringspunkt mellem Halvcirklen og den Cirkel, hvis Punkters Potens med Hensyn til den omskrevne Cirkel er lig det givne Produkt.

(Ogsaa løst af J. Byskov.)

112. Givet en Ellipse og en Cirkel med Centrum i det ene Brændpunkt og en Radius lig Brændstraalernes konstante Sum. Vis, at der er uendelig mange Trekanter omskrevne om Ellipsen og indskrevne i Cirklen.

Opløsning. Cirklen indeholder de Punkter, der ere symmetriske med det andet Brændpunkt med Hensyn til Ellipsens Tangenter, og dette Brændpunkt bliver Højdernes Skæringspunkt i en Trekant, der er indskreven i Cirklen og omskreven om Ellipsen; men i en Cirkel kan der indskrives uendelig mange Trekanter, hvis Højder skære hinanden i et givet Punkt. Drages nemlig gennem det givne Punkt P en vilkaarlig Korde DC, og oprejses paa Midten M af DP en vinkelret, skærende Cirklen i A og B, vil $\triangle$ ABC opfylde Betingelsen; thi skærer AP Siden BC i E, er

$$\triangle EPC \sim \triangle MDA$$

altsaa AE Højde.

114. Vinkel ABC ligger i et lodret Plan, AB er vandret og øverst. D er et vilkaarligt Punkt i AB og E et saadant Punkt i BC, at BE = BD. Bevis, at et Punkt falder i kortere Tid igennem DE end igennem en anden ret Linje fra D til BC.

Opløsning. Falder Punktet fra et vilkaarligt Punkt D i AB til et vilkaarligt Punkt E i BC, udtrykkes Tiden ved Formlen

$$t = \sqrt{\frac{2DE}{g \sin D}},$$

idet g er Tyngdens Acceleration.

Ligningen omformes til:

$$t = \sqrt{\frac{2BD \cdot \sin B}{g \sin E \cdot \sin D}} = \sqrt{\frac{4BD \sin B}{g\,[\cos(E - D) - \cos(E + D)]}},$$

hvoraf ses, at t har sin mindste Værdi for $\cos(E - D) = 1$, altsaa for

$$BD = BE.$$

(Ogsaa løst af J. Byskov.)

116. Naar ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d ere Radierne i de ydre Røringscirkler for en Firkant, hvori en Cirkel kan indskrives, T_a, T^b, T_c, T_d Fladeindholdene af de fire Trekanter med Grundlinierne a, b, c, d, der fremkomme ved Forlængelse af Siderne, da er

$$\frac{T_a}{\varrho_a} = \frac{T_c}{\varrho_c} \text{ og } \frac{T_b}{\varrho_b} = \frac{T_d}{\varrho_d},$$

"ket ønskes bevist.

Opløsning. Kaldes Forlængelserne af d og b til deres Skæringspunkt m og n, og ligger dette Skæringspunkt til samme Side som c, bliver

$$T_a = \frac{1}{2} \varrho_a (m + n + d + b - a)$$

$$T_c = \frac{1}{2} \varrho_c (m + n + c)$$

men $$d + b = a + c$$

altsaa $$\frac{T_a}{T_c} = \frac{\varrho_a}{\varrho_c}.$$

Beviset føres paa samme Maade for de andre Trekanter.

(Ogsaa løst af O. A. Smith.)

119. Givet en Cirkel og to Punkter M og N. Indskriv i Cirklen en Trekant ABC saaledes, at AB gaar gennem M, BC gennem N og AMNC bliver indskrivelig.

Opløsning. Tangenten i B bliver parallel med MN. Er A derved bestemt, drages Linjer derigennem fra M og N, hvorved A og C findes.

121. Givet en Cirkel og en ret Linie. Find i denne et saadant Punkt, at to Linier, som trækkes derigennem i givne Retninger, skære Cirklen i diametralt modsatte Punkter.

Opløsning. Det søgte Punkt være C, Diameterens Endepunkter A og B og det Punkt, hvori Trekanten ABC's omskrevne Cirkel anden Gang skærer den givne Linje, M. Buen BM er da bekendt, og Konstruktionen kan udføres saaledes:

En vilkaarlig Diameter drages og over den som Korde tegnes et Afsnit, der rummer Vinkel ACB. Fra AB's ene Endepunkt afsættes en Bue lig BM, og Figuren drejes om den givne Cirkels Centrum, indtil denne Bues andet Endepunkt falder i den givne Linje. Det andet Skæringspunkt mellem den givne Linje og Cirklen er da C.

123. Vis, at Ligningen

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 =$$

$$3(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

ikke har andre reelle Løsninger end

$$x = \pm y = \pm z.$$

Opløsning. Ligningen gives Formen:

$$(x^2 - y^2)^2 = (y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$$

eller en af de andre 5 dermed analoge, idet de tre Størrelser x, y og z kunne ombyttes paa alle Maader.

Af disse Former vælges en saadan, at man paa venstre Side har Differensen mellem den størstes og næststørstes Kvadrater (Fortegnene ikke medregnede). Første Faktor paa højre Side af Lighedstegnet bliver da positiv, sidste negativ.

Den eneste reelle Løsning er altsaa:

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) = 0$$

eller

$$x^2 = y^2 = z^2.$$

125. I enhver Trekant ABC er

$$(a \operatorname{tg} B - 2r)(b \operatorname{tg} C - 2r)(c \operatorname{tg} A - 2r) =$$
$$(a \operatorname{tg} C - 2r)(b \operatorname{tg} A - 2r)(c \operatorname{tg} B - 2r)$$

og

$$(a \operatorname{tg} B - 2\gamma)(b \operatorname{tg} C - 2\alpha)(c \operatorname{tg} A - 2\beta) =$$
$$-(a \operatorname{tg} C - 2\beta)(b \operatorname{tg} A - 2\gamma)(c \operatorname{tg} B - 2\alpha),$$

idet r er Radius i den indskrevne Cirkel, α, β og γ Radierne i de udvendige Røringscirkler.

Opløsning. 1.

$$\operatorname{tg} A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}{1 - \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$= \frac{2T}{s(s-a) - (s-b)(s-c)}.$$

$$\frac{c \operatorname{tg} A - 2r}{b \operatorname{tg} A - 2r} = \frac{\frac{2T \cdot c}{s(s-a)-(s-b)(s-c)} - \frac{2T}{s}}{\frac{2T \cdot b}{s(s-a)-(s-b)(s-c)} - \frac{2T}{s}} = \frac{(s-b)(2s-c)}{(s-c)(2s-b)}.$$

Ved Ombytning af Bogstaverne faaes:

$$\frac{a \operatorname{tg} B - 2r}{c \operatorname{tg} B - 2r} = \frac{(s-c)(2s-a)}{(s-a)(2s-c)}; \quad \frac{b \operatorname{tg} C - 2r}{a \operatorname{tg} C - 2r} = \frac{(s-a)(2s-b)}{(s-b)(2s-b)}.$$

altsaa ved Multiplikation

$$\frac{a \operatorname{tg} B - 2r}{c \operatorname{tg} B - 2r} \cdot \frac{b \operatorname{tg} C - 2r}{a \operatorname{tg} C - 2r} \cdot \frac{c \operatorname{tg} A - 2r}{b \operatorname{tg} A - 2r} = 1.$$

2. En lignende Fremgangsmaade giver:

$$\frac{c \operatorname{tg} A - 2\beta}{b \operatorname{tg} A - 2\gamma} = \frac{a-b}{a-c}$$

og de tilsvarende Ligninger, altsaa

$$\frac{c \operatorname{tg} A - 2\beta}{b \operatorname{tg} A - 2\gamma} \cdot \frac{a \operatorname{tg} B - 2\gamma}{c \operatorname{tg} B - 2\alpha} \cdot \frac{b \operatorname{tg} C - 2\alpha}{a \operatorname{tg} C - 2\beta}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-c)(b-a)(c-b)} = -1.$$

Opgaver til Løsning.

Af Adjunkt Åsted.

126. Find x af Ligningerne

a) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt[3]{x} = a$;

b) $\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt{2x} = 1$.

127. Hvorledes findes x af Ligningen:

$$\sqrt{a + \sqrt{b - x}} + \sqrt{a - \sqrt{b + x}} = c?$$

Regningen udføres, naar $a = 1{,}76$; $b = 1$; $c = 2$.

128. Et femcifret Tal begynder med Ciffret 2, et andet med Ciffret 4. Flyttes i det første Tal 2 efter de øvrige Ciffre, faas Tallenes Sum; flyttes i det andet 4 efter de øvrige Ciffre, faas Tallenes Differens. Hvilke ere Tallene?

129. Summen af en Kvotientrækkes første og andet Led er 1, Summen af det sidste og næstsidste Led er 32 og Summen af hele Rækken er 63. Find q, n og a.

130. En Kvotientrækkes Sum er 211, første Led 16 og næstsidste Led 54. Bestem Rækken.

131. Fire Led af en Differensrække, nemlig første, andet, femte og sidste Led danne en Kvotientrække, hvis Sum er 80. Find q, a, d, n og s.

132. To Differensrækker ere givne ved at Summen af det andet og det ottende Led er 11, ved at Differensen mellem Kvadraterne paa det 12te og 6te Led er 60 og ved at Summerne af de n første Led i begge Rækker ere ligestore. Find a, d, n og s i begge Rækker.

133.

$$\frac{x^{2n+1} + y^{2n+1}}{x^{2n+1} + x^{2n}.y + x^{2n-1}y^2 + \ldots + xy^{2n} + y^{2n+1}} + \frac{x^{2n+1} - y^{2n+1}}{x^{2n+1} - x^{2n}.y + x^{2n-1}y^2 - \ldots + xy^{2n} - y^{2n+1}}.$$

134. To Sider i en Trekant ere givne = a og b. Medianen til den tredje Side deler Trekanten i to Trekanter, hvis omskrevne Cirklers Radier tilsammen er n Gange Radius til Trekantens omskrevne Cirkel. Søg Medianen udtrykt ved n, a og b.

135. I $\triangle$ ABC skære Medianerne hinanden i O. Man skal angive Formler til Beregning af Vinklerne, naar Firkanten AO er indskrivelig i en Cirkel og $bc = na^2$. Hvilke Værdier kan n have? Vinklerne beregnes, naar $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{4}{5}$.

136. Givet en Kurve og en Cirkel. Find et Punkt paa Kurven, hvorfra man kan trække to Sekanter til Cirklen saaledes, at Sekanternes Kordestykker og Summen af deres udenfor Cirklen liggende Stykker ere givne Linier.

137. At konstruere en Trekant ABC af B — C og de to Stykker, hvori h_a deles af en anden Højde.

138. Diagonalerne mellem de modstaaende Vinkelspidser af en Sekskant, (2 (2n + 1)-Kant) som er indskreven i en Cirkel, skære hverandre i eet Punkt. Bevis, at Produktet af hveranden Side er lig Produktet af de øvrige Sider.

139. To paa hinanden vinkelrette Korder i samme Cirkel have Længderne 2b og 2c, Afstanden mellem Kordernes Midtpunkter er a; søg Cirklens Radius.

140. Til en Cirkel med Radius r trækkes Tangenter i Vinkelspidserne af en indskreven Trekant; naar den derved fremkomne Trekant har sin omskrevne Cirkels Radius = R, hvad er da Forholdet mellem de to Trekanters Arealer?

141. Summen af en Trekants Sider er lig Summen af de udvendige Røringscirklers Radier, og Trekantens Areal er n Gange Kvadratet paa Radius til den indskrevne Cirkel. Vis, at Tangenserne af de halve Vinkler i Trekanten ere Rødder i Ligningen

$$x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{n} = 0.$$

For n = 8 beregnes Vinklerne.

142. Hvad er det geometriske Sted for den omskrevne Cirkels Centrum i en Trekent, hvis Sider ere Asymptoterne og en Tangent til en given Hyperbel?

143. En Hyperbel og en Ellipse have de samme Brændpunkter. Man skal søge det geometriske Sted for Kurvernes Skæringspunkter, idet deres Ekscentriciteter have reciproke Værdier, 1) naar Hyperblens første Akse er given = 2a, 2) naar Ellipsens Storakse er given = 2a.

144. At konstruere et Keglesnit, naar man kender Ekscentriciteten, Brændpunktsaksens Retning og tre Tangenter.

Svenske Eksamensopgaver.

Mogenhetsexamen,

vårterminen 1892.

Mekaniska och fysikaliska.

1. Från den öfversta punkten af ett 38 m. långt, lutande plan nedsläppes en kropp utefter planet, och 1 sekund senare kastas en annan kropp i motsatt riktning från planets lägsta punkt. Med huru stor hastighet bör detta kast ske, för att kropparne skola mötas midt på planet, då detta med horisonten bildar en vinkel paa 25^0. Friktionen kan lemnas utan afseende. Accelerationen vid fritt fall är $9{,}8$ m.

Opløsning. 1. Man har

$$19 = 4{,}9 \,.\, \sin 25^0 \,.\, t^2 \qquad (1)$$

og

$$19 = a(t - 1) - 4{,}9 \sin 25^0 (t - 1)^2. \qquad (2)$$

Af (1) findes $t = 3{,}029$ Sek., som indsat i (2) giver:

$$a = 13{,}57 \text{ m.}$$

2. En upprättstående ihålig cylinder, som upptill är öppen, men nedtill sluten, och hvars inre diameter är 16 cm., innehåller olja i tillräcklig mängd. Ofvanom denna finnes i cylindern en tät slutande, cylindrisk kolf, som är rörlig utan nämvärd friktion. Ett i båda ändarne öppet, lodrätt rör, hvars längd är 50 cm. och inre diameter 2 cm., är inkittadt i ett genom kolfven gående hål på sådant sätt, at rörets nedre mynning ligger i kolfvens underyta. Kolfven och röret väga tillsammans 3,4 kg. Om kolfven yterligare belastas med 5,7 kg., fylles hela röret nätt och jämt med olja. Huru stor är oljans egentliga vigt?

Opløsning. Oljens Tryk paa Stemplets Underflade bliver lig Vægten af en Oljemængde med Rumfanget $64\pi \,.\, 50 \div \pi \,.\, 50$. Da dette Tryk skal bære 9,1 kg. = 9100 gr., har man:

$$63\pi \,.\, 50 \,.\, x = 9100$$

$$x = 0{,}92.$$

3. En lodrätt metallsträng är fäst med sin öfre ända i en fast punkt, med sin nedre vid en rak, enarmad häfstång.

Strängen kan således spännas derigenom, att på häfstången hänges en gifven vigt. Hänges denna 27 cm. från stångens vridningsaxel, angifver strängen vid svängning en viss ton. Hvar skall samma vigt hängas, för att strängen skall angifva en ton, som är tersen till den förra? Häfstångens vigt kan lemnas utan afseende.

Opløsning. Kaldes Vægten P, Afstanden fra Strengen til Vægtstangens Hvilepunkt a og det søgte Punkts Afstand fra Hvilepunktet x, bliver Spændingen i Strængen henholdsvis $\frac{27 . P}{a}$ og $\frac{x . P}{a}$.

Kaldes Svingningstallene n og $\frac{5}{4}$. n, har man if. en bekjendt Sætning:

$$n = k . \sqrt{\frac{27P}{a}}$$

og

$$\frac{5}{4} n = k . \sqrt{\frac{x . P}{a}},$$

hvoraf ved Divisjon:

$$\frac{5}{4} = \sqrt{\frac{x}{27}}$$

ↄ: $x = 42{,}19$ ctm.

4. Ett kärl af 10 liters rymd fylles vid ett barometerstånd af 75 cm. med torr luft af 0^0, och igentäppes. Den så afstängda luften uppvärmes derpå till 88^0 och kärlet öppnas ånyo vid 72 cm.'s barometerstånd. Beräkna vigten af den luft, som då lemnar kärlet, hvars utvidgning kan lemnas utan afseende. Luftens utvidgningskoefficient är $\frac{1}{273}$. Vigten af en liter luft af 0^0 och 76 cm.'s tryck är 1,293 gr.

Opløsning. Flasken indeholder oprindelig $10 . 1{,}293 . \frac{75}{76}$ Gram luft, efter Aabningen $\frac{10 . 1{,}293 . 72}{76 . (1 + \frac{88}{273})}$ Gram. Forskjellen herimellem, 3,4965 Gram, er da den søgte Størrelse.

5. En viss mängd kvicksilfver uppvärmes till 93^0 och hälles derpå i en vattenkalorimeter, hvars temperatur derigenom stegras från 6^0 till 14^0. Hvilken blandningstempe

erhållits, om man i kalorimetern hade hält blott halfva kvicksilfvermängden?

Opløsning. Kaldes Kviksølvets Vægt P, dets Varmefylde c og Vandets Vægt p, har man:

$$P \cdot c \cdot 79 = p \cdot 8$$

$$\frac{1}{2} P \cdot c \cdot (93 - x) = p(x - 6),$$

hvor x er den søgte Temperatur. Ved Divisjon faas:

$$\frac{93 - x}{2 \cdot 79} = \frac{x - 6}{8}$$

$$x = 10{,}2^0.$$

6. En gifven samlingslins är sådan, att den af ett föremål på 18 cm.'s afstånd från detsamma ger en verklig bild, som är lika stor som föremålet. Huru stark blir förstoringen, om denna lins användes som lupp för ett öga, hvars afstånd för tydligt seende är 27 cm.?

Opløsning. Forstørringen er lig $1 + \frac{s}{p} = 1 + \frac{27}{9} = 4$.

7. En galvanisk stapel bestående af 5 lika element, ordnade jämte hvarandra, så att de bilda ett par, slutes med en 15 m. lång ledningstråd, hvars elektriska motstånd är 1,2 ohm. Om elementen i stället ordnas efter hvarandra, erhålles samma strömstyrka som i förra fallet, om den yttre ledningens längd ökas med 20 m. af samma slags tråd. Huru stort är motståndet i hvarje element?

Opløsning. Modstanden i den 20 m. lange Traad er 1,6 Ohm. Man har da i de 2 Tilfælde:

$$s = \frac{E}{\frac{1}{5}M + 1{,}2} \text{ og } s = \frac{5E}{5M + 2{,}8},$$

hvoraf: $M = 0{,}8$ Ohm.

Algebraiska.

1. Om man i en aritmetisk progression af tre termer ökar den första med 8, blir den en geometrisk progression, hvars na är 26. Hvilka äro termerna?

Opløsning. Med de sædvanlige Betegnelser haves

$$(a + 8) . q = a + d,$$
$$(a + 8) . q^2 = a + 2d,$$
$$3a + 3d = 18.$$

Man finder $a = 10$ eller -6

$d = -4$ eller 12.

Leddene ere altsaa enten 10, 6, 2

eller —6, 6, 18.

2.' På ett järnvägståg, som går mellan tvänne orter, finnas på andra klassen 64 personer mer än på den första, och på tredje klassen 166 personer mer än på den andra. Samtliga biljetterna äro betalda med 669 kronor 60 öre, hvarvid andra klassens resande betalt 163 kronor 20 öre mer än första klassens, men 40 kronor 80 öre mindre än tredje klassens. Då vidare biljettpriset till första klassen är lika med summan af biljettprisen till andra och tredje klasserna, så frågas efter personernas antal i hvarje klass samt dertill hörande biljettpris.

Opløsning.

Er der på	I	x	Personer,	Billetpris $(y + z)$	Øre
»	II	$x + 64$	— ,	— y	»
»	III	$x + 230$	— ,	— z	»

fås, til Bestemmelse af de ubekendte Størrelser, de tre Ligninger

$$x (y + z) + (x + 64) y + (x + 230) z = 66960$$
$$(x + 64) y = x (y + z) + 16320$$
$$(x + 230) z = (x + 64) y + 4080.$$

Disse reduceres til

$$xy + xz + 32y + 115z = 33480$$
$$-xz + 64y = 16320$$
$$-xy + 230z = 20400;$$

adderes disse, faar man

$$32y + 115z = 23400,$$

hvoraf $y = 300, \quad z = 120,$

og derefter $x = 24.$

3. Hvad är förhållandet mellan diagonalerna i en sjuhörning?

Opløsning.

$$\frac{D}{d} = \frac{\sin \frac{720^0}{7}}{\sin \frac{360^0}{7}} = 2 \cos \frac{360^0}{7} = 1{,}2476.$$

4. En person har två ur och brukar bestämma tiden genom att taga aritmetiska mediet mellan bådas uppgifter; det ena drar sig emellertid 4 minuter före i dygnet, det andra 11 minuter efter på ett dygn och 6 timmar. En dag, då båda uren stälts rätt kl. 6 f. m., kom han dock för sent till ett bantåg; det afgick nämligen en minut tidigare, än han beräknat. Hur dags var det?

Opløsning. Det ene Ur vinder $\frac{1}{6}'$ i Timen, det andet taber $\frac{11}{30}'$ i samme Tid. Vise begge Ure ret Tid Kl. 6 f. m., vil Manden ved sin Bestemmelse af Tiden efter x Timers Forløb begaa en Fejl, der er $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{11}{30}\right) \cdot x' = -\frac{x}{10}'$. Heraf ser man, at det nævnte Banetog afgik 10 Timer efter Kl. 6 f. m., altsaa Kl. 4 e. m.

5. Af tre räta linier skära hvarandra den första och andra under den spetsiga vinkeln α, den andra och tredje under den spetsiga vinkeln β, samt den tredje och första under den spetsiga vinkeln γ. Af den första linien projicieras ett stycke, hvars längd $=$ m, på den andra linien; den erhållna projektionen projicieras på den tredje linien, den nya projektionen åter på den første linien, o. s. v. i oändlighet. Huru stor blir summan af linien m och alla projektionerna?

Opløsning.

$$\begin{aligned} s &= m + m \cos\alpha + m \cos\alpha \cos\beta + m \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \\ &\quad + m \cos^2\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dots\dots\dots \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= m + \frac{m(\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}{1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \\ &= m \cdot \frac{1 + \cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta}{1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}. \end{aligned}$$

6. Om höjderna i en triangel äro h_1, h_2, h_3, huru stora äro de motsvarande sidorna?

Opløsning.

Se dette Tidsskrift 1ste Aargang S. 63 nederst.

7. Hvilken af alla räta koner, som kunna omskrifvas kring en gifven sfer, har minsta volymen?

Opløsning. Kaldes Kuglens Radius r, Keglens Grundfladeradius R, dens Højde h, er Volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

men $$\frac{r}{R} = \frac{h - r}{\sqrt{R^2 + h^2}}, \text{ hvoraf } R^2 = \frac{hr^2}{h - 2r},$$

altsaa $$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2 r^2}{h - 2r}.$$

Sætter man $$\frac{h^2}{h - 2r} = z,$$

findes $$h = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4} - 2rz},$$

saa at Betingelsen for h ($> 2r$) reel er

$$z \geq 8r.$$

For den største omskrevne Kegle er Højden $= 4r$, Volumen $= \frac{8}{3}\pi r^3 =$ det dobbelte af Kuglen.

Geometriska.

1. Att konstruera en triangel, då man känner två af dess höjder samt summan af de sidor, mot hvilka dessa höjder äro vinkelräta.

Opløsning. Siderne forholde sig omvendt som Højderne, de findes derfor ved at dele den givne Sum i bekendt Forhold og Trekanten konstrueres derefter let.

2. Två lika stora cirklar tangera hvarandra utantill. Att draga en sekant så, att det stycke deraf, som faller mellan cirklarne, blir dubbelt så stort som hvardera kordan.

Opløsning. Sekanten maa være parallel med Centerlinien. Kaldes dens Skæringspunkter med den ene af Cirklerne A og B, AB's Midtpunkt M og Sekantens Skæringspunkt med Fællestangenten P, er MB $= \frac{1}{2}$ BP. B bestemmes derfor ved at dele Røringsradien i 3 ligestore Dele, i det Centrum nærmeste Delingspunkt oprejse en vinkelret og skære denne med Cirklen.

3. Hvilken är orten för en rörlig punkt, hvars afstånd från två fasta punkter hafva ett gifvet inbördes förhållande?

Opløsning. Det geometriske Sted er som bekendt en Cirkel, hvis Diameter er Linien mellem de Punkter, der dele de givnes Forbindelseslinie harmonisk i det givne Forhold.

4. Genom en hyperbels ena focus är mot den reella axeln dragen en perpendikel, som träffar kurfvan i P. Tangenten i P skär nämda axel midt emellan centrum och focus. Huru stor vinkel bilda då asymptoterna med hvarandra?

Opløsning. Tangenten i Punktet (x, y) af Hyperblen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ afskærer af X-Aksen Stykket $\frac{a^2}{x}$. If. det givne er da

$$\frac{a^2}{ae} = \frac{a}{2}, \quad e = 2.$$

Er Asymptotevinklen α, haves

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{3},$$

$$\frac{\alpha}{2} = 60^0, \quad \alpha = 120^0.$$

5. I en cirkel äro på samma sida om medelpunkten två parallela kordor dragna; den enas båge är 108°, den andras 72°. Konstruera en cirkelsektor, hvars radie är dubbelt så stor som cirkelns, och hvars yta är lika med den del af cirkeln, som ligger mellan kordorna!

Opløsning. Den givne Figur er Differens mellem to Afsnit, men da Centraltrekanterne ere lige store, bliver den rensen mellem Udsnittene eller lig et Udsnit paa 36°.

Den søgte Cirkelsektor bliver da 9^0 eller $\frac{1}{40}$ af Cirklen, der let konstrueres.

6. a och b äro två gifna determinerade linier. Kan man geometriskt konstruera $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ och $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$, samt, om så är, huru?

Opløsning. $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ kan ikke geometrisk konstrueres. Derimod kan $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ omskrives til $\sqrt{a\sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}}} = \sqrt{ak}$ (Mellemproportional), idet $k = \sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}} = \sqrt{a^2 + l^2}$ (Hypotenuse), idet $l = \frac{b^2}{a}$ (Fjerdeproportional).

7. Två punkter på en cirkels periferi äro gifna. Drag från dessa punkter två parallela kordor, som tilsammans hafva en gifven längd!

Opløsning. Kaldes Cirklens Centrum O, de givne Punkter A og B, AB's Midtpunkt M, bestemmes Skæringspunktet mellem en Linie gennem M parallel med de søgte Korder og en Linie gennem O vinkelret paa Korderne ved to geometriske Steder, nemlig en Cirkel over MO som Diameter og en Cirkel med Centrum M og Radius $= \frac{1}{4}$ af Kordernes Sum.

Danske Eksamensopgaver.

Skolelærereksamen 1892.

(Opløsningerne ved J. Byskov.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A køber i Frankrig 10 Fade Vin, hvert indeholdende $933\frac{1}{3}$ Liter, til en Pris af $1\frac{11}{16}$ Franc pr. Liter. Han udreder endvidere Fragt og Told, hvilken sidste er $21\frac{1}{4}$ Øre pr. dansk

Pot. Ved Aftapningen spildes $1\frac{1}{4}$ pCt. af Vinen, og det til den øvrige Vin nødvendige Antal Flasker (hver til 3 Pægle) købes for 7 Øre Stykket. Naar de øvrige Omkostninger udgøre $7\frac{1}{7}$ pCt. af Indkøbspris med de andre foran nævnte Udgifter, og hver Flaske Vin nu staar A i en Pris af 120 Øre, saa spørges:

I. Hvor mange Flasker Vin fik A?

II. Hvor meget udgjorde Fragten pr. Fad?

A sælger Vinen i 3 Partier, a, b og c, hvoraf b er dobbelt saa stort som a. For b faar han 7 Øre mindre end for a, og for c 7 Øre mindre end for b, alt pr. Flaske. Han tjener ved Handelen $8\frac{1}{3}$ pCt., men, hvis Salgspriserne pr. Flaske for a og c havde været ombyttede (og for b uforandret), vilde han have tjent $13\frac{1}{3}$ pCt.

III. Af hvor mange Flasker bestod hvert Parti?

IV. Hvad fik A for en Flaske af hvert?

(100 Litre = $103\frac{1}{2}$ danske Potter; 1 Franc = 70 Øre.)

Besvarelsen maa ved alle Opgaver gives saa udførlig, at Fremgangsmaaden tydelig kan ses.

Opløsning.

I. $933\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{98\frac{3}{4}}{100} \cdot \frac{103\frac{1}{2}}{100} \cdot \frac{4}{3} = 12719$ Fl. Vin.

II. Indkøbsprisen	$= 933\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 1\frac{11}{16} \cdot 70 =$	11025 Kr.	Ø.
Tolden	$= 933\frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{103\frac{1}{2}}{100} \cdot 20\frac{1}{4} =$	2052 -	75 -
Flaskerne	$12719 \cdot 7 =$	890 -	33 -
	Ialt	13968 Kr.	08 Ø.

Alle A's Udgifter = 120 . 12719 = 15262,80 Kr.

$$\text{Indkp.} + \text{Fr.} + \text{Told} + \text{Fl.} = 15262{,}80 \cdot \frac{100}{107\frac{1}{2}}$$
$$= 14245{,}28 \text{ Kr.}$$

Fragten = 14245,28 — 13968,08 = 277,20 Kr,

altsaa pr. Fad 27 Kr. 72 Øre.

III. For hver Flaske, c indeholder mere end a, vil der ved Ombytningen vindes 14 Øre. Nu vindes der i alt $15262{,}80 . \frac{5}{100}$, altsaa indeholdt c $15262{,}80 . \frac{5}{100} . \frac{1}{14} = 5151$ Fl. mere end a. Ved at tage disse Flasker fra det hele Parti og dele Resten i Forholdet 1 : 2 : 1 faar man a = 1817 Fl., b = 3634 Fl., c = 7268 Fl.

IV. Udsalgspr. $= 15262{,}80 . \frac{108\frac{1}{3}}{100} = 16534{,}70$ Kr.

Havde b og c kostet lige saa meget pr. Fl. som a, vilde Udsalgspr. være bleven forøget med $3634 . 7 + 7268 . 14 = 1271{,}90$ Kr.

Altsaa har 1 Fl. af a kostet $\frac{16534{,}70 + 1271{,}90}{12719} = 140$ Øre, b = 133 Øre og c = 126 Øre.

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

3 Personer, A, B og C, skulle udføre et Arbejde, som A alene kan fuldende i 60 Dage. Deres Arbejdsdygtighed er saaledes, at B i 5 Dage udretter lige saa meget som C i 6 Dage, og hvis A og C arbejdede i Forening, vilde de fuldføre Arbejdet i 36 Dage.

I. Hvis A arbejder 16 Dage mere end B, og denne 8 Dage mere end C, hvor længe maa da C arbejde?

II. Hvis C arbejder 3 Gange saa længe som B, og denne 5 Gange saa længe som A, hvor mange Dage arbejder da den sidste?

III. Hvor længe varer Arbejdet, hvis A først arbejder i $\frac{7}{18}$, derefter B i $\frac{5}{18}$, og endelig C i Resten af den Tid, som nu i alt medgaar?

IV. Hvis Arbejdsdagenes Antal for hver af de 3 Personer skal staa i samme Forhold som deres Arbejdsdygtighed, hvor meget maa der da tilkomme

af Betalingen, som er 206 Kr. 36 Øre, naar denne skal deles i Forhold til det af hver udførte Arbejde?

Opløsning.

A kan i 1 Dag udføre $\frac{1}{60}$ af Arb.; C $\frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$; B $\frac{1}{90} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{75}$. Forholdet mellem deres Arbejdsdygtighed er da $A : B : C = \frac{1}{60} : \frac{1}{75} : \frac{1}{90} = 15 : 12 : 10$.

I. A udfører $\frac{24}{60}$, og B $\frac{8}{75}$ af Arb., før C kommer til. Der er altsaa tilbage at udføre $1 - \frac{24}{60} - \frac{8}{75} = \frac{37}{75}$. Dette kan udføres af B i 37 Dage, og da hans Arbejdsdygtighed er $\frac{12}{37}$ af den samlede, vil Arbejdet vare $37 \cdot \frac{12}{37} = 12$ Dage.

II. Forholdet mellem det af hver udførte Arbejde $A : B : C = 15 : (12 . 5) : (10 . 15) = 1 : 4 : 10$. A udfører altsaa $\frac{1}{15}$ hvilket tager $\frac{1}{15} : \frac{1}{60} = 4$ Dage.

III. Arbejdstiden forholder sig som $7 : 5 : 6$, og det udførte Arbejde $A : B : C = (15 . 7) : (12 . 5) : (10 . 6) = 7 : 4 : 4$. A udfører $\frac{7}{15}$, hvilket tager $\frac{7}{15} : \frac{1}{60} = 28$ Dage. Hele Arbejdstiden altsaa $= 28 . \frac{18}{7} = 72$ Dage.

IV. Summen deles efter Forholdstallene $15^2 : 12^2 : 10^2$, hvorved A faar $206{,}36 . \frac{225}{469} = 99$ Kr; B 44 Kr; C 63,36 Kr.

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

Til Opbevaring af Stenolie udgraves i Jorden et Rum, 5 Alen dybt, foroven 40 Alen langt og 20 Alen bredt, forneden 30 Alen langt og 15 Alen bredt, hvilket Rum dækkes af et Tag, som forneden slutter sig til det udgravede Rums øverste Kant, og hvis Sideflader og Endeflader danne lige store Vinkler med den vandrette Jordoverflade. En Stenolietønde udgør $4\frac{2}{3}$ Kubikfod, og Mellemrummene have et Rumfang, som er $14\frac{2}{7}$ pCt. af det, der indtages af Tønderne. Hvor mange Tønder Stenolie kan der anbringes i det hele lukkede Rum, hvis Tagets Sideflader ved Tagryggen danne ianden.

I. paa 90 Grader;

II. paa 120 Grader?

Opløsning.

Det udgravede Rum er en afkortet Pyramide. Det kan rumme $\frac{5}{3}(40 \,.\, 20 + \sqrt{40 \,.\, 20 \,.\, 30 \,.\, 15} + 30 \,.\, 15) \,.\, 8 \,.\, \frac{100}{114\frac{2}{7}} \,.\, \frac{1}{4\frac{2}{3}}$ = 4625 Tdr.

Tagrummet er en Kile, hvis Volumen findes efter Formlen $V = \frac{1}{3} h B (A + \frac{a}{2})$, hvor A og B ere Længden og Bredden forneden, a Længden foroven. Da Sideflader og Endeflader skraane lige meget, ville Længden og Bredden aftage lige meget. Man har da baade for (I) og (II) $B = 20$; $A = 40$; $a = 20$ Al. h er i 1ste Tilfælde 10, i andet $\frac{10}{\sqrt{3}}$ Al.

I. $\frac{1}{3} \,.\, 10 \,.\, 20 \,.\, (40 + \frac{20}{2}) \,.\, 8 \,.\, \frac{100}{114\frac{2}{7}} \,.\, \frac{1}{4\frac{2}{3}} = 5000$ Tdr.;

altsaa ialt $4625 + 5000 = 9625$ Tdr.

II. $\frac{5000}{\sqrt{3}} =$ c. 2887; altsaa ialt c. 7512 Tdr.

Anm. Den her benyttede Formel for Kilens Volumen findes i den paa næsten alle Seminarier benyttede Regnebog og forudsættes altsaa bekendt.

Geometrisk Tegning.

a ―――――――――――――――――――――― b

Gjennem Tegnepapirets Midtpunkt tegnes 5 rette Linier af Længde 2-ab, og saaledes at deres Endepunkter kunne være Vinkelspidserne i en regelmæssig Tikant. Hver af disse 5 Linier gøres til Side i 2 ligesidede Trekanter. Disse 10 Trekanters ind- og omskrevne Cirkler tegnes.

De rette Linier punkteres, de smaa Cirkler tegnes med kraftig Linie, de store Cirkler med fin Linie.

Tillæg.

Ved en ekstraordinær Skolelærerinde-Eksamen i Maj vare Opgaverne i Regning, hvoraf der til denne Eksamen kun gives to, de samme som de to første til Skolelærereksamen med Undtagelse af, at Spørgsmaalene III og IV i Opg. Nr. 1 løde saaledes:

»A sælger Vinen i 3 Partier, a, b og c, af hvilke a er dobbelt saa stort som b, og dette dobbelt saa stort som c. For a faar han 3 Øre mere end for b, og for b 5 Øre mere end for c, alt pr. Flaske, hvorved han ved hele Handelen tjener 10 pCt.

III. Af hvor mange Flasker bestod hvert Parti?

IV. Hvad fik han for en Flaske af hvert?«

og at Spørgsmaalene i Opg. 2 vare stillede saaledes:

I. Hvis A først arbejder i 16 Dage, derpaa B i 25 Dage, hvor længe skal C da være om Resten?

II. Hvis A arbejder 16 Dage mere end B, og denne 8 Dage mere end C, hvor længe maa da C arbeide?

III. Hvis C arbejder 3 Gange saa længe som B, og denne 5 Gange saa længe som A, hvor mange Dage arbejder da den sidste?

IV. Hvis hele Arbejdet skal endes i 71 Dage, og A først arbeider alene de første 32 Dage, hvor mange af de øvrige Dage skulle da B og C hver for sig arbeide?

Opløsning ad Nr. 1: 7268, 3634 og 1817 Flasker; 134 Øre, 131 Øre og 126 Øre. ad Nr. 2: I. 36 Dage, II. 12 Dage, III. 4 Dage og IV. 15 og 24 Dage.

(N. B.)

Løste Opgaver.

(Løsninger af J. C. Carlsen.)

111. Givet 2 Cirkler; læg en Tangent til hver, idet den Vinkel de danne er given, og det Stykke de afskære paa en ?ivet.

Opløsning. Centrerne være A og B, Tangenternes Skæringspunkt C, deres Skæringspunkter med Fællestangenten M og N.

Forskydes B parallelt med Fællestangenten et Stykke lig MN hen i Stillingen B_1, er $\angle AMB_1$ bekendt (se Aarg. 1891 Nr. 84), saa at M kan findes, hvorefter C let bestemmes.

113. A_1, B_1 og C_1 ere Skæringspunkterne mellem Højderne i en Trekant og den omskrevne Cirkel, P er et Punkt af dennes Periferi og H Højdernes Skæringspunkt. Konstruer Trekanten, naar A_1, B_1 og C_1 ere bekendte; bevis endvidere, at H ligger paa ret Linie med Skæringspunkterne mellem PA_1 og BC, PB_1 og AC, PC_1 og AB.

Opløsning. $\angle ACB_1 = \angle ACC_1$, $\smile AB_1 = \smile AC_1$. A, B og C ere altsaa Midtpunkterne af Buerne B_1C_1, C_1A_1 og A_1B_1.

Ere A_2, B_2 og C_2 Skæringspunkterne mellem de angivne Liniepar (A_2 paa Forlængelsen af CB), faas

$$\angle A_1HA_2 = \angle HA_1A_2 = \tfrac{1}{2} \smile PA,$$
$$\angle B_1HB_2 = \angle HB_1B_2 = \tfrac{1}{2} \smile PB,$$
$$\angle A_1HB_1 = \tfrac{1}{2} \smile A_1B_1 + \tfrac{1}{2} \smile AB,$$

hvoraf

$$\angle A_2HB_2 = \angle A_1HA_2 - \angle B_1HB_2 + \angle A_1HB_1$$
$$= \smile AB + \tfrac{1}{2} \smile A_1B_1 = 180^0,$$

saa at A_2, B_2 og H ligge paa en ret Linie.

Da Punktet H ligger paa ret Linie med hvilkesomhelst to af Skæringspunkterne, ligger det paa ret Linie med dem alle.

115. ABCD er en Firkant, hvori en Cirkel kan indskrives. Forlængelserne af de i C sammenstødende Sider skæres i Retningerne B og D af de modsatte Siders Forlængelser. Fra A trækkes Linier parallele med BC og CD indtil de skære de med AB og DA parallele fra A fjerne Tangenter til de Cirkler, der røre henholdsvis CD og BC de tilstødende Siders Forlængelser. Ligeledes trækkes

og D Linier parallele med CD og BC, indtil de skære de med BC og CD parallele fra B og D fjerneste Tangenter til de Cirkler, der røre DA og AB samt de tilstødende Siders Forlængelser. Bevis, at ethvert af de derved dannede fire Parallelogrammer er dobbelt saa stort som den givne Firkant.

Opløsning. 1) CB og DA skære hinanden i O. Den med AB parallele fra A fjerneste Tangent til den Cirkel, der rører CD og de tilstødende Siders Forlængelser, skærer BC i E, AD i F og Linien fra A parallel med BC i G. Vi sætte AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, OB = m, OA = n, CE = e, EF = f, FD = g og den i Opgaven først nævnte Cirkels Radius = r. Da er

$$\text{Firk. ABCD} = \tfrac{1}{2} r (a + b + c + d) = r (a + c);$$

$$\frac{\triangle \text{OEF}}{f^2} = \frac{\triangle \text{OAB}}{a^2} = \frac{\triangle \text{AFG}}{(f - a)^2}$$

$$= \frac{\triangle \text{OEF} - \triangle \text{OAB} - \triangle \text{AFG}}{f^2 - a^2 - (f - a)^2} = \frac{\text{Parall. ABEG}}{2a (f - a)},$$

$$\text{Parall. ABEG} = 2 \cdot \frac{f - a}{a} \cdot \triangle \text{OAB};$$

$$\frac{f - a}{a} = \frac{b + e}{m} = \frac{d + g}{n} = \frac{b + d + e + g - f + a}{m + n - a}$$

$$= \frac{b + d + c + a}{m + n - a} = \frac{2 (a + c)}{m + n - a};$$

$$\triangle \text{OAB} = \tfrac{1}{2} r (m + n - a);$$

$$\text{Parall. ABEG} = 2r (a + c) = 2 \cdot \text{Firk. ABCD}.$$

2) CD og BA skære hinanden i R. Den med BC parallele fra B fjerneste Tangent til den Cirkel, der rører AD og de tilstødende Siders Forlængelser, skærer CD i H, BA i K og Linien fra B parallel med CD i L. Da er

$$\text{Parall. BCHL} = \triangle \text{RBC} - \triangle \text{RHK} + \triangle \text{BKL}.$$

Ved en lignende Fremgangsmaade som ovenfor faas

$$\text{Parall. BCHL} = 2 \cdot \frac{b - \text{HK}}{b} \cdot \triangle \text{RBC} = 2 \cdot \text{Firk. ABCD}.$$

Da de to andre Parallelogrammer faas ved Ombytning af [illegible] lde Beviserne ogsaa for disse.

120. To Cirkler c_1 og c_2 skære hinanden i **M** og N. Læg en Trekant ABC ligedannet med en given $A_1B_1C_1$ saaledes, at B falder paa c_1, C paa c_2, AB gaar gennem **M** og AC gennem N.

Opløsning. BC skærer c_1 anden Gang i D og c_2 i E; da er

$$\frown MD = 2 . \angle B_1 \text{ og } \frown NE = 2 . \angle C_1 ;$$

herved er D og E og dermed Trekanten bestemt.

122. Indskriv i en Firkant en Halvcirkel, som rører de to Sider og har Diameterens Endepunkter paa de andre to.

Opløsning. En vilkaarlig Cirkel rørende AB og BC tegnes. I Diagonalen BD findes derpaa et saadant Punkt, at Linier gennem dette parallele med AD og DC skære Cirklen i diametralt modsatte Punkter (121). Den fremkomne Figur er da ligedan beliggende med den søgte med B som Ligheds-punkt.

Korrespondance.

Spørgsmaal. Kan Nr. 2 af de aritmetiske Opgaver fra almindelig Forberedelseseksamen i Marts d. A. ikke forstaas paa en anden Maade end den i Tidsskriftet angivne? Er Meningen ikke den, at Kapitalen skal føres saa langt frem, at man kan hæve en Rente, der er 19 p. Ct. af den oprindelige Kapital? Manden vilde da blive 1 Aar ældre.

Svar: Opgavens Udtryk er noget ubestemt. Der burde enten være spurgt: »Hvor gammel er Manden, naar han kan hæve en Rente, der er o. s. v.«, altsaa som af Dem angivet, og den Mening bør der vel lægges i Opgaven efter dens Ordlyd — eller: »Hvor gammel er Manden, naar hans Kapital er vokset saa meget, at hans Renteindtægt herefter er o. s. v.«, og den Mening vil man efter gængs Sprogbrug være tilbøjelig til at tillægge Opgaven.

Danske Eksamensopgaver.

Adgangseksamen til polyteknisk Læreanstalt.

Juni 1892.

I. At konstruere en Cirkel, som gaar gennem to givne Punkter og skærer en given ret Linie saaledes, at den Centrivinkel, som svarer til den afskaarne Bue, har en given Størrelse.

Opløsning. De givne Punkter være A og B. Den givne Linie CD. E er Midten af AB; en paa AB vinkelret Linie gennem E skærer CD i F. Naar maa tegner en Cirkel med Centrum i et Punkt o af EF og saaledes beliggende, at den Bue, som CD afskærer, svarer til den givne Centrivinkel, saa kan man let bevise, at denne Cirkel er ligedan beliggende med den søgte med F til Lighedspunkt. Ved denne Cirkel kan Opgaven løses, idet Linien FB skærer Cirklen om o i to til B svarende Punkter b og b'. Linier fra B parallele med ob og ob' skære EF i Punkter, som hvert især kan tages til Centrum for den søgte Cirkel. Da Opgavens Løsning afhænger af Skæring mellem en Cirkel og en ret Linie, kan Antallet af Opløsninger blive 2, 1 eller 0.

II. 1. Find x af Ligningen

$$\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt[3]{4x+2}=-4,$$

saaledes at man for hver funden x-Værdi angiver, med hvilke Værdier de i Ligningen indgaaende Rodstørrelser skulle tages, for at den vedkòmmende x-Værdi kan tilfredsstille Ligningen.

2. Man har givet n Planer. Tre og tre af disse bestemme et Skæringspunkt, og der gives ikke fire Planer, som gaa gennem det samme Punkt. Hvormange Skæringspunkter opstaa paa denne Maade, og hvormange Forbindelseslinier kan der drages mellem to og to af disse Punkter, naar ingen Forbindelseslinie maa ligge i nogen af de givne Planer?

1. Sæt $u=\sqrt[3]{2x-3}$, $v=\sqrt[3]{4x+2}$,

da er
$$u^3 = 2x - 3,$$
$$v^3 = 4x + 2,$$
$$u + v = -4.$$

Elimination af x og u giver:
$$v^3 + 8v^2 + 32v + 40 = 0.$$

Denne Ligning kan let løses, fordi den har en rational Rod. Man finder følgende Systemer af Værdier:

$$v = -2, \quad v = -3 + \sqrt{-11}, \quad v = -3 - \sqrt{-11},$$
$$u = -2, \quad u = -1 - \sqrt{-11}, \quad u = -1 + \sqrt{-11},$$
$$x = -\frac{5}{2}, \quad x = \frac{35 + 8\sqrt{-11}}{2}, \quad x = \frac{35 - 8\sqrt{-11}}{2}.$$

2. Antallet af Skæringspunkter er:
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Tre vilkaarlige Planer bestemme et Skæringspunkt A. De øvrige $n - 3$ Planer bestemme
$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
Skæringspunkter. Disse forbundne med A give Forbindelseslinier af den søgte Slags. Da dette kan siges om alle med A analoge Punkter, bliver det samlede Antal Linier
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Dog mærkes, at hver Forbindelseslinie paa denne Maade er talt dobbelt. Det virkelige Antal er da:
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}.$$

III. 1. I en Trekant kender man omskrevne Cirkels Radius $R = 5{,}678$, og Vinklerne tilfredsstille Ligningerne
$$\frac{\operatorname{tg} A}{1{,}234} = \frac{\operatorname{tg} B}{2{,}345} = \frac{\operatorname{tg} C}{3{,}456}.$$
Find Sider og Vinkler.

2. I en plan Firkant ABCD har man givet AB = 132,66 BC = 134,16, CD = 168,00, DA = 215,18. Vinklen mel

de to modstaaende Sider BC og AD er $64^0\,56'\,49''$. Find Vinklen mellem de modstaaende Sider AB og CD.

Opløsning. 1. Sættes de ligestore Forhold = k, faas:

$$\operatorname{tg} A = 1{,}234k,\quad \operatorname{tg} B = 2{,}345k,\quad \operatorname{tg} C = 3{,}456k.$$

Af $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$,

faas:
$$k = \sqrt{\frac{7{,}035}{1{,}234 \cdot 2{,}345 \cdot 3{,}456}},$$
$$\log k = 0{,}92362 - 1.$$

Heraf findes Vinklerne:

$$\log\operatorname{tg} A = 0{,}01494,\quad \log\operatorname{tg} B = 0{,}29376,\quad \log\operatorname{tg} C = 0{,}46219.$$
$$A = 45^0\,59'\,7'',\quad B = 63^0\,2'\,58'',\quad C = 70^0\,57'\,57''.$$

For Siderne findes:

$$\log a = 0{,}91205,\quad \log b = 1{,}00530,\quad \log c = 1{,}03081,$$
$$a = 8{,}1668,\quad b = 10{,}1228,\quad c = 10{,}7353.$$

2. Midtpunktet af AB er P. BC og AD forskydes parallelt, indtil B og A falde i P. Derved opstaar Trekanten PQR, hvis ene Side QR gaar gennem Midten S af CD. I PQR kender man en Vinkel og de indesluttende Sider. Siden QR beregnes paa sædvanlig Maade:

$$\log QR = 2{,}30023,\quad QR = 199{,}632.$$

I $\triangle$ QSC kender man Siderne:

$$QS = 99{,}816,\quad QC = 66{,}330,\quad CS = 84{,}000.$$

$\angle$ QCS er den søgte Vinkel:

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}QCS = 9{,}94148 - 10,\quad \tfrac{1}{2}QCS = 41^0\,9'\,5'',$$
$$\angle QCS = 82^0\,18'\,10''.$$

IV. Man har givet tre Parabler:

$$y^2 = px, \qquad (1)$$
$$y^2 = p(x - p), \qquad (2)$$
$$y^2 = 2p(x + \tfrac{1}{4}p). \qquad (3)$$

a) Til (2) trækkes en Tangent, som bliver Korde i (1). Find det geometriske Sted for Kordens Midtpunkt og det geometriske Sted for Medianernes Skæringspunkt i den Trekant, hvis Vinkelspidser ere Begyndelsespunktet og Kordens

Endepunkter, idet Tangentens Røringspunkt gjennemløber Parablen (2).

b) Til (1) trækkes en Tangent, til (3) en derpaa vinkelret Tangent. Find det geometriske Sted for disse Tangenters Skæringspunkt.

Opløsning. a) Tangenten til (2) med Røringspunkt (ξ, η) har Ligningen:

$$2\eta y = p(x + \xi - 2p),$$

eller:

$$2\eta y = p(x - p) + \eta^2.$$

Ordinaterne til dens Skæringspunkter med (1) bestemmes ved

$$y^2 - 2\eta y - p^2 + \eta^2 = 0.$$

Midtpunktets Ordinat Y er da:

$$Y = \eta.$$

Heraf følger, da Tangenten ikke er parallel med Abscisseaksen, at Midtpunktet ligger i Røringspunktet. Midtpunktets geometriske Sted er da Parablen (2). Stedet for Medianernes Skæringspunkt faas ved at multiplicere denne Parabel med $\frac{2}{3}$ m. H. t. Begyndelsespunktet. Ligningen for det geometriske Sted er da:

$$y^2 = \tfrac{2}{3} p(x - \tfrac{2}{3} p).$$

b) Tangenterne til (1) og (3) have Ligningerne

$$2y\eta = p(x + \xi), \quad 2y\eta' = 2p(x + \xi' + \tfrac{1}{2} p),$$

idet Røringspunkterne ere (ξ, η) og (ξ', η'). Ligningerne kunne ogsaa skrives:

$$2y\eta = px + \eta^2, \quad 2y\eta' = 2p(x + \tfrac{1}{4} p) + \eta'^2.$$

Da Tangenterne ere vinkelrette paa hinanden, er:

$$\frac{p}{2\eta} \cdot \frac{2p}{2\eta'} = -1.$$

Ved denne Ligning kan man bortskaffe η af den første Tangents Ligning. Nu blive de to Ligninger:

$$\eta'^2 + \frac{py}{x} \cdot \eta' + \frac{p^3}{4x} = 0,$$

$$\eta'^2 - 2y\eta' + 2px + \tfrac{1}{2} p^2 = 0.$$

Mellem disse Ligninger elimineres η'. Resultatet sammensættes af to Ligninger:

$$p + 2x = 0, \quad (p - 4x)^2 + 16y^2 = 0.$$

Disse bestemme det søgte geometriske Sted.

Afgangseksamen for studerende.

Juni 1892.

Aritmetik.

1. Hvilke Værdier kan y have, naar Rødderne i den kvadratiske Ligning

$$yx^2 + (2y + 3)x + 2y - 1 = 0$$

skulle være reelle?

Løses Ligningen med Hensyn til y, faar man en Brøk. Hvilken er den største, og hvilken den mindste Værdi, som denne Brøk kan faa, naar x kan være et hvilket som helst positivt eller negativt Tal? Hvor stor maa x være, naar y skal have den ene eller den anden af disse Værdier? Endelig spørges der om, for hvilke Værdier af x den nævnte Brøk bliver Nul, positiv, negativ?

2. Find x af Ligningen

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$$

3. Hvilke fælles Faktorer kunne $x + y$ og $x - y$ have, naar x og y ere indbyrdes primiske, og for hvilke Værdier af de indbyrdes primiske Tal x og y bliver $x^2 - y^2$ et Kvadrat?

Opløsning. 1. Rødderne ere

$$x = \frac{-2y - 3 \pm \sqrt{9 + 16y - 4y^2}}{2y}.$$

Da $\quad 9 + 16y - 4y^2 = (9 - 2y)(2y + 1)$

bliver x reel, naar

$$\frac{9}{2} \geqq y \geqq -\frac{1}{2}.$$

y's største Værdi bliver da $y_1 = \frac{9}{2}$ og dertil svarer

$$x = \frac{-2y_1 - 3}{2y_1} = -\frac{4}{3}.$$

y's mindste Værdi bliver $y_2 = -\frac{1}{2}$, hvortil svarer

$$x = -\frac{2y_2 + 3}{2y_2} = 2.$$

Man finder $$y = \frac{1 - 3x}{x^2 + 2x + 2}.$$

Da Nævneren er positiv for alle reelle x-Værdier, bliver

y positiv, naar $x < \frac{1}{3}$,

y Nul, naar $x = \frac{1}{3}$ og naar $x = \infty$,

y negativ, naar $x > \frac{1}{3}$.

2. Ligningen omskrives til

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0,$$

der deler sig i

1) $\sin 3x = 0$

$3x = p.\,180^0$

$x = p.\,60^0$.

2) $\cos 3x + \cos x \cos 2x = 0$

$2 \cos x \cos 2x = \sin x \sin 2x$

$\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 2$

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = p.\,180^0 \pm 35^0\,15'\,52''$.

3. Er $x + y = p.\,m$,

og $x - y = q.\,m$,

bliver $2x = (p + q)\,m$, $2y = (p - q)\,m$.

Den fælles Faktor m maa altsaa gaa op i 2, følgelig være 1 eller 2.

Skal man have

$$x^2 - y^2 = k^2$$

eller
$$(x+y)(x-y) = k^2 = a^2 b^2 c^2 \ldots$$

hvor a, b, c... ere Primfaktorerne i k, maa ifølge det foregaaende enten $x+y$ og $x-y$ hver for sig bestaa af lutter kvadratiske Faktorer, altsaa

$$x+y = p^2, \quad x-y = q^2;$$

eller $x+y$ og $x-y$ hver for sig være det dobbelte af et Kvadrattal, altsaa

$$x+y = 2u^2, \quad x-y = 2v^2.$$

I første Tilfælde faas

$$x = \frac{p^2+q^2}{2}, \quad y = \frac{p^2-q^2}{2},$$

hvor p og q indbyrdes primiske og begge ulige.

I andet Tilfælde

$$x = u^2+v^2, \quad y = u^2-v^2,$$

hvor u lige, v ulige eller omvendt.

Beregningsopgave.

Arealet af et konveks Trapez er 581,267, én af de ikke parallele Sider 27,614, én af Diagonalerne 35,208 og dennes Vinkel med de parallele Sider 31° 19′ 14″. Beregn Sider og Vinkler i Trapezet.

Opløsning. AD = 27,614, DB = 35;208,

$$\angle BDC = 31^0\,19'\,14'' = \angle DBA.$$

$$\sin A = \frac{35{,}208 \,.\, \sin 31^0\,19'\,14''}{27{,}614}$$

$$\log \sin A = 9{,}82137 - 10$$

$$A = \begin{cases} 41^0\,30'\,44'' \\ 138^0\,29'\,16'' \end{cases}, \quad D = \begin{cases} 138^0\,29'\,16'' \\ 41^0\,30'\,44'' \end{cases}.$$

1) $$\angle ADB = 107^0\,10'\,2''$$

$$AB = \frac{27{,}614 \,.\, \sin ADB}{\sin 31^0\,19'\,14''} = 50{,}755$$

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} \,.\, 27{,}614 \,.\, 35{,}208 \,.\, \sin ADB$$
$$= 464{,}46$$

$$\triangle DBC = 581{,}267 - \triangle ABD = 116{,}807$$
$$= \tfrac{1}{2} DB . DC \sin 31^0\, 19'\, 14''.$$
$$DC = 12{,}764.$$
$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}(C - DBC) = \frac{DB - DC}{DB + DC} \cdot \cot 15^0\, 39'\, 37''$$
$$\log \text{tg}\, \tfrac{1}{2}(C - DBC) = 0{,}22242$$
$$\tfrac{1}{2}(C - DBC) = 59^0\, 4'\, 10''$$
$$C = 133^0\, 24'\, 33''.$$
$$BC = 25{,}194.$$
$$B = 46^0\, 35'\, 27''.$$

2)
$$\angle ADB = 10^0\, 11'\, 30''.$$
$$AB = 9{,}3994$$
$$\triangle ABD = 86{,}014, \quad \triangle DBC = 495{,}253.$$
$$CD = 54{,}12$$
$$C = 37^0\, 16'\, 47''$$
$$B = 138^0\, 43'\, 13''.$$
$$BC = 30{,}216.$$

Geometri.

1. I en given Trekant skal der indskrives en anden, hvis Sider to og to danne lige store Vinkler med den Side i den givne, der indeholder deres Skæringspunkt.

2. En ret Vinkels Ben tangere en given Parabel. Bevis, at den Linie, der forbinder Røringspunkterne, gaar gennem et fast Punkt, og find det geometriske Sted for Vinklens Toppunkt.

3. I en firesidet Pyramide O-ABCD ere a, b, c, d Midtpunkterne af OA, OB o. s. v., m, n, p, q Midtpunkterne af AB, BC, CD og DA. En Prismatoide har Endefladerne abcd og mnpq, medens Sidefladerne bestemmes ved den brudte Linie aqdp... Hvor stort er Prismatoidens Volumen i Forhold til Pyramidens?

Opløsning. 1. De Vinkler, som den søgte Trekan Sider danne med den givnes, kunne let findes udtrykte

den givne Trekants Vinkler. Opgaven er da den samme, som dén: »i en given Trekant at indskrive en anden med givne Sideretninger« — hvilken let løses ved Ligedannethedsmetoden.

Den søgte Trekant er som bekendt den, der har sine Vinkelspidser i den givne Trekants Højdefodpunkter.

2. Kaldes Koordinaterne til den rette Vinkels Toppunkt x og y, ville Benenes Retningskoefficienter være Rødder i Ligningen

$$tg^2 v - \frac{y}{x} tg\, v + \frac{p}{4x} = 0.$$

Røddernes Produkt skal være $= -1$, altsaa

$$\frac{p}{4x} = -1, \quad x = -\frac{p}{4}.$$

Toppunktet ligger paa Ledelinien, dets Polar gaar derfor gennem dennes Pol, Brændpunktet. Dette ses ogsaa umiddelbart saaledes: Lad Røringspunkternes Ordinater være η og η_1; da er $\frac{p^2}{4\eta\eta_1} = -1$ og Polarens Ligning

$$y - \eta = \frac{p}{\eta + \eta_1}\left(x - \frac{\eta^2}{p}\right)$$

eller
$$y - \eta = \frac{4p\eta}{4\eta^2 - p^2}\left(x - \frac{\eta^2}{p}\right)$$

eller
$$y = \frac{4p\eta}{4\eta^2 - p^2}\left(x - \frac{p}{4}\right),$$

der netop er Ligningen for et Liniebundt med Toppunktet $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$.

3. Volumen OABCD $= V$,

Prismatoiden $= v$.

$$v = V - \text{Oabcd} - \text{Bbmn} - \text{Ccnp} - \text{Ddpq} - \text{Aaqm}$$

$$= V - \tfrac{1}{8}V - \tfrac{1}{8}\text{OACB} - \tfrac{1}{8}\text{OBDC} - \tfrac{1}{8}\text{OACD} - \tfrac{1}{8}\text{OBDA}$$

$$= V - \tfrac{1}{8}V - \tfrac{1}{8}V - \tfrac{1}{8}V = \tfrac{5}{8}V.$$

$$\frac{v}{V} = \frac{5}{8}.$$

Projektionstegning.

En Plan er given ved sine Spor, to Punkter i Planen ved deres Projektioner.

Tegn Projektionerne af et regelmæssigt Tetraeder, der har en Sideflade i Planen, en af denne Sideflades Vinkelspidser i det ene givne Punkt, og dens Centrum i det andet Punkt.

Ved Optrækningen tænkes den givne Plan at være gennemsigtig. De givne Linier og Punkter maa ikke indtage særegne Stillinger mod Projektionsplanen.

IV Klasses- og almindelig Forberedelseseksamen.

Juni 1892.

Aritmetik.

1. Reducer

$$\frac{\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}-\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}.$$

2. To Cyklister køre fra Kjøbenhavn til Sorø (10 Mil). Den ene kører $1/2$ Mil mere i Timen end den anden og bruger derfor 1 Time mindre til hele Turen. Hvor mange Mil i Timen kører hver Cyklist?

3. Et vist Tal er deleligt baade med 196241 og med 330013; er det ogsaa deleligt med de to Tals Produkt?

Opløsning. 1. Størrelsen omskrives til

$$\frac{\sqrt[4]{3^3}-\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}-\frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$$

$$=\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}-\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2^2}$$

$$=2\sqrt[4]{6}.$$

2. Første Cyklist køre x Mil i Timen, den anden altsaa $(x - \frac{1}{2})$ Mil i Timen. Ifølge Opgaven er da

$$\frac{10}{x} = \frac{10}{x - \frac{1}{2}} - 1,$$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - 5 = 0,$$

$$x = \frac{5}{2},$$

idet den negative Løsning forkastes. Man faar altsaa det Resultat, at første Cyklist kører $2\frac{1}{2}$ Mil, den anden 2 Mil i Timen.

3. De to Tal have 631 til st. f. Maal. Det er derfor ikke sikkert, at det tænkte Tal T er deleligt med deres Produkt, da det nemlig er muligt, at T kun indeholder 631 i første Potens. Indeholder T derimod 631 i anden eller højere Potens, ville de to opgivne Tals Produkt gaa op deri.

Geometri.

1. En Cirkel rører de to Sider i en Trekant og skærer den tredje. De Vinkler i Trekanten, der ligge ved denne Side ere henholdsvis 25^0 og 75^0, og den Cirkelbue, der ligger uden for Trekanten, er 100^0. Hvor store ere de tre andre Cirkelbuers Gradeantal?

2. Den ene Vinkel i en Trekant er 120^0, og Længderne af de Sider, der indeslutte Vinklen, ere henholdsvis 2 og $\sqrt{3}$. Find Trekantens Areal.

3. Konstruer et Trapez, som kan indskrives i en Cirkel, af en af de Sider, som ikke ere parallele, en af de parallele Sider og disses Afstand (Højden).

Opløsning. 1. Trekanten ABC's Sider AB og AC røres af Cirklen i D og E, Siden BC skæres i F (nærmest B) og G. Givet: $\smile FG = 100^0$. Da $\angle A = 80^0$, bliver $\smile DE = 100^0$.

$$\begin{aligned} \angle B = 75^0 &= \tfrac{1}{2} \smile DEG - \tfrac{1}{2} \smile DF \\ &= \tfrac{1}{2}(360^0 - 100^0 - \smile DF) - \tfrac{1}{2} \smile DF \\ &= 130^0 - \smile DF, \end{aligned}$$

altsaa $\smile DF = 55^\circ$,
og $\smile EG = 360^\circ - (100^\circ + 100^\circ + 55^\circ) = 105^\circ$.

2. $\angle C = 120^\circ$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Fældes Højden AD, bliver $CD = 1$, $AD = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Trekantens Areal $= \frac{1}{2} . \sqrt{3} . \sqrt{3} = \frac{3}{2}$.

3. Et indskriveligt Trapez er ligebenet. Konstruktionen: Afsæt den givne »parallele« Side BC, træk en Linie parallel med denne i Højdens Afstand og skær den med 2 Cirkler, der have B og C til Centrer og den »ikke parallele Side« til Radius. Derved A og D. 2 Løsninger.

Praktisk Regning.

1. I en Alder af 14 Aar arvede A 103508 Kr. De bleve indbetalte i Overformynderiet, hvor de bleve forrentede med 4 pro Cent pro anno; og først da A blev 25 Aar gl. fik han Kapitalen med Renter og Renters Renter udbetalt.

For 47970 Kr. købte han nu Statsobligationer, som han betalte med $97\frac{1}{2}$ pro Cent af den paalydende Værdi, og hvoraf den aarlige Rente var $3\frac{1}{2}$ pro Cent.

Med Resten af Pengene begyndte han en Forretning, men da den gav $6\frac{1}{4}$ pro Cents Tab hvert Aar, hævede han den efter 8 Aars Forløb og anbragte de tiloversblevne Penge saaledes, at de gav ham $3\frac{4}{5}$ pro Cent i aarlig Rente.

Hvor stor en Sum fik han nu i aarlig Rente af hele sin Formue?

2. En Købmand sendte 8 Kasser med 250 Æg i hver Kasse til England. Han havde gennemsnitlig givet 72 Øre for hver Snes Æg, og Omkostningerne ved Forsendelsen beløb sig til ialt $17\frac{1}{2}$ pro Cent af Indkøbsprisen. I England viste det sig, at nogle af Æggene vare revnede; for dem betaltes der kun 2 sh. pr. Hundrede, medens de øvrige solgtes til en Pris af 6 sh. for hvert Hundrede. Hvor mange revne-

var der, naar Købmandens Fortjeneste blev 20 pro Cent af hans samlede Udgifter?

18 Kr. = 20 sh.

Opløsning. 1. $x = 103508 \cdot 1{,}04^{11}$

$$\log 103508 = 5{,}01497$$
$$11 \log 1{,}04 = 0{,}18733$$
$$\log x = 5{,}20230$$
$$x = 159330.$$
$$47970$$
$$111360$$

$$y = 111360 \cdot 0{,}9375^{8}$$
$$\log 111360 = 5{,}04673$$
$$8 \log 0{,}9375 = 0{,}77576 \div 1$$
$$\log y = 4{,}82249$$
$$y = 66450.$$
$$R_1 = 66450 \cdot 0{,}038 = 2525{,}10$$
$$R_2 = \frac{47970 \cdot 100}{97\frac{1}{2}} \cdot 0{,}035 = 1722{,}00$$
$$\text{Kr. } 4247{,}10$$

2. $8 \cdot 250 = 2000.$

Indkøbspris $100 \cdot 0{,}72$ Kr. $= 72{,}00$ Kr.

Omkostninger $72{,}00 \cdot \frac{17\frac{1}{2}}{100} = 12{,}60$

84,60 Kr.

$$\text{Udsalgspris} = \frac{84{,}60 \cdot 120 \cdot 20}{100 \cdot 18} \text{ sh.} = \frac{1128}{10} \text{ sh.}$$

Antages der at være revnet x Æg, maa ifølge Opgaven

$$20 \cdot 6 - \frac{x}{100} \cdot 4 = \frac{1128}{10},$$

hvoraf $x = 180.$

Adgangsprøven til Søofficersskolen.

Foraaret 1892.

1. En Cirkel rører de to Sider AB og AC af den ligebenede Trekant ABC (AC = BC) henholdsvis i E og D, samt skærer den tredje Side BC i Punkterne F og G, saaledes at CF = 16, FG = 9 og GB = 3. Find [1]) Trekant ABC's Sider, [2]) Siderne i en anden Trekant AB_1C_1, ligedannet med den første, omskrevet om Cirklen, [3]) Cirklens Radius og [4]) alle de Korder, der forbinde Rørings- og Skæringspunkterne mellem Cirklen og Trekant ABC's Sider.

Opløsning. [1]) BC = 28 = CA.

$$DC = \sqrt{16 \cdot 25} = 20, \text{ altsaa } DA = 8 = AE.$$

$$BE = \sqrt{3 \cdot 12} = 6, \text{ altsaa } AB = 14.$$

[2]) Da E er AB_1's Midtpunkt, bliver $AB_1 = 16$, og derefter

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1B_1}{CB} = \frac{8}{7}, \quad AC_1 = C_1B_1 = 32.$$

[3]) Arealet af $\triangle AB_1C_1 = 64\sqrt{15}$

Perimeteren $= 40$,

hvoraf $$r = \frac{8}{5}\sqrt{15}.$$

[4]) $\triangle EFB$ og $\triangle BGE$ ere ligedannede med ABC ($\angle B$ fælles, de indesluttende Sider proportionale), deraf

$$EG = 6, \quad EF = 12.$$

Da EF $\neq$ AC, vil DO's Forlængelse (O er Cirklens Centrum) staa vinkelret paa Midten M af EF og

$$OM = \frac{2\sqrt{15}}{5}, \text{ altsaa } DM = 2\sqrt{15}.$$

Derefter $$DF = DE = 4\sqrt{6}.$$

Endelig if. Ptolemæus $$DG = \frac{15 \cdot 4\sqrt{6}}{12} = 5\sqrt{6}.$$

2. Der er forelagt Ligningen:

$$x^2 - 3996x - 2345 - b = 0.$$

Bestem b [1]) saaledes, at Rødderne forholde sig som 23 : 13; [2]) saaledes, at Summen af Røddernes omvendte Værdier er 18. [3]) Find uden Anvendelse af Logaritmer saamange Cifre af Ligningens Rødder som muligt, naar det om b kun vides, at det er et positivt éncifret Tal.

Opløsning.

[1])
$$\frac{\alpha}{23} = \frac{\beta}{13} = \frac{3996}{36} = 111,$$
$$\alpha = 2553, \quad \beta = 1443.$$
$$-b = 2553 \cdot 1443 + 2345 = 3686324.$$

[2])
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{3996}{-2345-b} = 18,$$
$$b = -2567.$$

[3]) $x = 1998 \pm \sqrt{1998^2 + 2345 + b}$

Roden ligger mellem $\sqrt{3994349} = 1998,586$

og $\sqrt{3994358} = 1998,589$,

altsaa
$$x = 1998 \pm 1998,58 = \begin{cases} 3996,58 \\ -0,58. \end{cases}$$

3. Beregn

$$x = \sqrt[5]{\frac{\log\left(\sqrt[3]{2314} - \sqrt[7]{1111}\right)}{\log\left(\sqrt[5]{2314} - \sqrt[5]{1111}\right)}} + \sqrt[4]{\frac{\log\left(\sqrt{2314} + \sqrt[4]{1111}\right)}{8^{2,0047} + 1}}$$

med den Nøjagtighed, som 5-cifrede Logaritmer kunne give.

Opløsning. $x = A + B$.

$$A = \sqrt[5]{-\frac{1,02135}{0,19206}} = -1,3968.$$

$$B = \sqrt[4]{\frac{1,73140}{65,63}} = 0,4030$$

$$x = -0,9938.$$

Tegneopgave.

Et Kvadrat $PAOA_1$, hvis Diagonaler ere = 2p (p = 2 Tom.) tegnes, og om O slaaes en Cirkel med Radius OA = OA_1. Idet F er Diagonalernes Skæringspunkt og M Midtpunktet af PF, tegnes gennem M Paralleler med PA og PA_1; disse skæres i henholdsvis R og R_1 af en Linie $\perp$ PO's Forlængelse ud over O i Afstanden $\frac{1}{2}$ p fra O. Om F som Centrum tegnes en Cirkel med Radius $\frac{5}{4}$ p og dens Skæringspunkter med AA_1's Forlængelser bestemmes. Røringskorden for Tangenterne fra R til Cirklen om O og Tangenterne til denne Cirkel i dens Skæringspunkter med PR_1 trækkes og fortsættes alle til Skæring med AA_1's Forlængelser. Over MR som Diameter tegnes en Cirkel, hvis Fælleskorde med Cirklen om O forlænges til Skæring med MR.

Løste Opgaver.

126. Find x af Ligningerne

$$a)\quad \sqrt{x + a^2} - \sqrt[3]{x} = a;$$

$$b)\quad \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt{2x} = 1.$$

Opløsning. a) $\sqrt{x + a^2} = a + \sqrt[3]{x}$, kvadreres:

$$x = \sqrt[3]{x^2} + 2a\sqrt[3]{x},$$

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2a) = 0.$$

$$\sqrt[3]{x} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{2} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8a}}{2}\right)^3. \end{cases}$$

Prøven viser, at alle 3 Værdier af x passe for den positive Værdi af Kvadratroden.

b) $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \sqrt{2x}$, kuberes:

$$7x = 3\sqrt{2x} + 2x\sqrt{2x},$$

$$\sqrt{x}(2\sqrt{2}\,.\,x - 7\sqrt{x} + 3\sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{x} = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ \frac{9}{8} \end{cases}$$

Alle 3 Værdier passe for den reelle Værdi af Kubikroden.

(H. S. Hermansen.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen og Overlærer Kr. Pedersen.)

127. Hvorledes findes x af Ligningen:

$$\sqrt{a + \sqrt{b-x}} + \sqrt{a - \sqrt{b+x}} = c?$$

Regningen udføres, naar $a = 1{,}76$; $b = 1$; $c = 2$.

Opløsning. Sættes

$$\sqrt{a + \sqrt{b-x}} - \sqrt{a - \sqrt{b+x}} = d,$$

hvor d maa være positiv for reelle x, faas

$$\sqrt{a + \sqrt{b-x}} = \frac{c+d}{2}, \quad \sqrt{a - \sqrt{b+x}} = \frac{c-d}{2}.$$

Af disse to Ligninger findes

$$x = b - [\tfrac{1}{4}(c+d)^2 - a]^2 \text{ og } x = -b + [a - \tfrac{1}{4}(c-d)^2]^2.$$

Kombineres de to Udtryk for x og søges d, faas

$$d^2 = 4a - 3c^2 \pm \sqrt{8(c^4 - 2ac^2 + 2b)},$$

hvorved x er bestemt.

I Eks. bliver

$$d^2 = \begin{cases} 0{,}64 \\ -10{,}56 \end{cases}, \quad d = \begin{cases} 0{,}8 \\ \sqrt{-10{,}56} \end{cases}, \quad x = \begin{cases} 0{,}96 \\ 6{,}8\sqrt{-10{,}56} \end{cases}.$$

(J. C. Carlsen.)

128. Et femcifret Tal begynder med Ciffret 2, et andet med Ciffret 4. Flyttes i det første Tal 2 efter de øvrige Ciffre, faas Tallenes Sum; flyttes i det andet 4 efter de øvrige Ciffre, faas Tallenes Differens. Hvilke ere Tallene?

Opløsning. Kald Tallene $20000 + x$ og $40000 + y$, da haves:

$$10x + 2 = 60000 + x + y$$
$$10y + 4 = 20000 + y - x,$$

hvoraf $x = 6829$ og $y = 1463$,

altsaa ere Tallene 26829 og 41463.

(Overlærer Kr. Pedersen.)

(Ogsaa løst af J. C. Carlsen.)

129. Summen af en Kvotientrækkes første og andet Led er 1, Summen af det sidste og næstsidste Led er 32 og Summen af hele Rækken er 63. Find q, n og a.

Opløsning. Med de sædvanlige Betegnelser er

$$a + aq = 1, \quad aq^{n-2} + aq^{n-1} = 32,$$
$$\frac{aq^n - a}{q - 1} = 63;$$

af den anden Ligning $aq^n = \frac{32q^2}{1+q}$,

af den første $a = \frac{1}{1+q}$; indsættes disse i den tredje, faas til Bestemmelse af q

$$32q^2 - 1 = 63q^2 - 63,$$
$$q = \pm\sqrt{2},$$

derefter $n = 12$

$$a = \pm\sqrt{2} - 1.$$

(Kr. Pedersen.)

(Ogsaa løst af H. S. Hermansen og J. C. Carlsen, Magnus Berg, Framnes.)

130. En Kvotientrækkes Sum er 211, første Led 16 og næstsidste Led 54. Bestem Rækken.

Opløsning. $\frac{aq^n - a}{q - 1} = 211, \; a = 16, \; aq^{n-2} = 54.$

altsaa $aq^n = 54q^2$.

Man finder $q = \begin{cases} \frac{3}{2}, \text{ derefter } n = 5. \\ \frac{65}{27} \text{ ubr.} \end{cases}$

(Kr. Pedersen.)

(Ogsaa løst af H. S. Hermansen, J. C. Carlsen, Magnus Berg, Framnes.)

131. Fire Led af en Differensrække, nemlig første, andet, femte og sidste Led danne en Kvotientrække, hvis Sum er 80. Find q, a, d, n og s.

Opløsning. Man har

$$q = \frac{a+d}{a} = \frac{a+4d}{a+d} = \frac{a+(n-1)d}{a+4d}, \qquad (1)$$

$$a + (a+d) + (a+4d) + [a+(n-1)d]$$
$$= 4(a+d) + nd = 80. \qquad (2)$$

Af (1) faas

$$q = \frac{3d}{d} = \frac{(n-2)d}{4d} = 3 = \frac{n-2}{4}, \; n = 14;$$

af (2) og den første (1) faas da

$$a = 2, \; d = 4. \quad u = 54, \; s = 392.$$

(J. C. Carlsen.)

132. To Differensrækker ere givne ved at Summen af det andet og det ottende Led er 11, ved at Differensen mellem Kvadraterne paa det 12te og 6te Led er 60 og ved at Summerne af de n første Led i begge Rækker ere ligestore. Find a, d, n og s i begge Rækker.

Opløsning. I første Række betegnes første Led og Differensen ved a_1 og d_1, i anden ved a_2 og d_2. De er

$$(a_1 + d_1) + (a_1 + 7d_1) = 11 = (a_2 + d_2) + (a_2 + 7d_2), \; (1)$$
$$(a_1 + 11d_1)^2 - (a_1 + 5d_1)^2 = 60 = (a_2 + 11d_2)^2 - (a_2 + 5d_2)^2, \; (2)$$
$$s = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1] = \frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2] \qquad (3)$$

Af (1) og (2) faas

$$2a_1 + 8d_1 = 11 = 2a_2 + 8d_2,$$

$$d_1(a_1+8d_1)=5=d_2(a_2+8d_2);$$

$$\begin{matrix}d_1\\d_2\end{matrix}\Big\}=\Big\{\begin{matrix}\frac{5}{8}\\-2\end{matrix},\quad \begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\Big\}=\Big\{\begin{matrix}3\\13\frac{1}{2}\end{matrix};$$

hvorpaa af (3)

$$n-1=-2.\frac{a_1-a_2}{d_1-d_2}=8,\ n=9;\ s=49\tfrac{1}{2}.$$

(J. C. Carlsen.)

133.

$$\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{x^{2n+1}+x^{2n}.y+x^{2n-1}y^2+\ldots+xy^{2n}+y^{2n+1}}$$
$$+\frac{x^{2n+1}-y^{2n+1}}{x^{2n+1}-x^{2n}.y+x^{2n-1}y^2-\ldots+xy^{2n}-y^{2n+1}}.$$

Opløsning. Idet Nævnerne ere

$$\frac{x^{2n+2}-y^{2n+2}}{x-y}\text{ og }\frac{x^{2n+2}-y^{2n+2}}{x+y},$$

faas let, at Størrelsen er lig 2, ogsaa for $x=y$.

(H. S. Hermansen, J. C. Carlsen.)

134. To Sider i en Trekant ere givne $=a$ og b. Medianen til den tredje Side deler Trekanten i to Trekanter, hvis omskrevne Cirklers Radier tilsammen er n Gange Radius til Trekantens omskrevne Cirkel. Søg Medianen udtrykt ved n, a og b.

Opløsning.

$$mac=4R_aT,\ mbc=4R_bT,\ abc=4RT;$$

divideres Summen af de to første med den sidste, faas

$$\frac{m(a+b)}{ab}=\frac{R_a+R_b}{R}=n,\quad m=\frac{nab}{a+b}.$$

(J. C. Carlsen.)

135. I $\triangle$ ABC skære Medianerne hinanden i O. Man skal angive Formler til Beregning af Vinklerne, naar Firkanten AO er indskrivelig i en Cirkel og $bc=na^2$. Hvilke Værdier kan n have? Vinklerne beregnes, naar $n=\frac{1}{2}$, $n=\frac{4}{5}$.

Opløsning. Da Firkant AO er indskrivelig, er

$$\frac{1}{2} b^2 = \frac{2}{3} m_c^2;$$

indsættes dette i Formlen

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} c^2 + 2m_c^2,$$

faas

$$b^2 + c^2 = 2a^2,$$

der i Forbindelse med bc = na² giver

$$b \pm c = a\sqrt{2(1 \pm n)}; \quad n \leqq 1.$$

Nu faas

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2n}, \quad n \geqq \frac{1}{2},$$

$$\sin B \pm \sin C = \frac{b \pm c}{a} . \sin A = \sqrt{2(1 \pm n)} . \sqrt{1 - \frac{1}{4n^2}},$$

der tjener til Beregning af Vinklerne.

$$n = \frac{1}{2} \text{ giver } \cos A = 1, \quad A = 0^0;$$

$$\sin B \pm \sin C = 0, \quad B \text{ og } C = 0^0 \text{ el. } 180^0.$$

$$n = \frac{4}{5} \text{ giver } \cos A = \frac{5}{8}, \quad A = 51^0\, 19';$$

$$\sin B + \sin C = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{78}{5}}, \quad \sin B - \sin C = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{78}{5}},$$

$$\sin B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{78}{5}}, \quad B = 99^0\, 6',$$

$$\sin C = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{78}{5}}, \quad C = 29^0\, 35'.$$

(J. C. Carlsen.)

136. Givet en Kurve og en Cirkel. Find et Punkt paa Kurven, hvorfra man kan trække to Sekanter til Cirklen saaledes, at Sekanternes Kordestykker og Summen af deres udenfor Cirklen liggende Stykker ere givne Linier.

Opløsning. Korderne være a og b, Sekanternes udenfor Cirklen liggende Stykker x og y, deres Sum s. Da er

$$x(x + a) = y(y + b),$$

$$x + y = s;$$

hvoraf $x = \frac{s(s+b)}{2s+a+b}$, der konstrueres som Fjerdeproportional.

Konstruktionen kan nu udføres saaledes. Et vilkaarligt Sted afsættes en Korde $AB = a$, paa Forlængelsen $BC = x$. En Cirkel gennem C koncentrisk med den givne skærer da den givne Kurve i det søgte Punkt.

(J. C. Carlsen.)

137. At konstruere en Trekant ABC af $B - C$ og de to Stykker, hvori h_a deles af en anden Højde.

Opløsning. D er Fodpunktet af h_a, H Højdernes Skæringspunkt.

Af $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ faas

$$BD . DC = DH . DA = k^2.$$

Drejes $\triangle ADB$ om AD hen i Stillingen ADB_1, er

$$\angle B_1AC = B - C,$$

og

$$DB_1 . DC = DH . DA = k^2:$$

af det sidste ses, at Firkant AHB_1C er indskrivelig i en Cirkel. Fældes fra dennes Centrum $OE \perp DC$, er

$$\angle EOC = \angle B_1AC = B - C.$$

Sættes EC (B_1E) lig d, kan d bestemmes ved i M, Midtpunktet af AH (MO er parallel med DC), at afsætte en Vinkel $DMF = B - C$; DF (F beliggende paa DC) er da lig d.

Derpaa faas

$$k^2 = DH . DA = DB_1 . DC$$
$$= (DE - d)(DE + d) = DE^2 - d^2,$$
$$DE = \sqrt{k^2 + d^2}.$$

E er da bestemt, hvorpaa C, B_1 og B let findes.

(J. C. Carlsen.)

138. Diagonalerne mellem de modstaaende Vinkelspidser af en Sekskant, (2 (2n + 1)-Kant) som er indskreven i en Cirkel, skære hverandre i eet Punkt. Bevis, at Produktet af hveranden Side er lig Produktet af de øvrige Sider.

Opløsning. Vinkelspidserne være A_1, $A_2 \ldots$, Diagonalernes Skæringspunkt O. Da er

$$\frac{A_1A_2}{A_4A_5} = \frac{OA_2}{OA_4}, \quad \frac{A_3A_4}{A_6A_1} = \frac{OA_4}{OA_6}, \quad \frac{A_5A_6}{A_2A_3} = \frac{OA_6}{OA_2},$$

hvoraf ved Multiplikation

$$\frac{A_1A_2 \,.\, A_3A_4 \,.\, A_5A_6}{A_4A_5 \,.\, A_6A_1 \,.\, A_2A_3} = 1.$$

Ved samme Fremgangsmaade ses, at Sætningen gælder for enhver Polygon, hvis Sidetal er af Formen $2(2n + 1)$.

139. To paa hinanden vinkelrette Korder i samme Cirkel have Længderne 2b og 2c, Afstanden mellem Kordernes Midtpunkter er a; søg Cirklens Radius.

Opløsning. Betegnes Centrets Afstand fra Korderne ved x og y, er

$$x^2 + y^2 = a^2$$

og i Følge Punkts Potens

$$b^2 - x^2 = c^2 - y^2 = r^2 - a^2.$$

Elimineres x og y, faas

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

(J. C. Carlsen, Kr. Pedersen.)

140. Til en Cirkel med Radius r trækkes Tangenter i Vinkelspidserne af en indskreven Trekant; naar den derved fremkomne Trekant har sin omskrevne Cirkels Radius = R, hvad er da Forholdet mellem de to Trekanters Arealer?

Opløsning. Den lille Trekant være abc, den store ABC; a, b og c betegne tillige Siderne i denne. Da er

$$A + 2a = 180^0$$

$$t = 2r^2 \sin a \,.\, \sin b \,.\, \sin c$$

$$= 2r^2 \cos\frac{A}{2} \,.\, \cos\frac{B}{2} \,.\, \cos\frac{C}{2}$$

$$= 2r^2 \,.\, \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc} \,.\, \frac{s(s-b)}{ca} \,.\, \frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$= 2 \cdot \frac{r^2 s}{abc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2 \cdot \frac{r^2 s}{abc} \cdot T;$$

$$\frac{t}{T} = \frac{2r^2 s}{abc} = \frac{2rT}{4RT} = \frac{r}{2R}.$$

(J. C. Carlsen.)

142. Hvad er det geometriske Sted for den omskrevne Cirkels Centrum i en Trekant, hvis Sider ere Asymptoterne og en Tangent til en given Hyperbel?

Opløsning. Hyperblen er

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Røringspunktet (x_1, y_1).

Af Tangenten $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

og Asymptoterne $y = \pm \frac{b}{a} x$

faas Trekantens to Vinkelspidser

$$\left[\frac{a^2 b}{2(bx_1 \mp ay_1)}, \; - \frac{ab^2}{2(ay_1 \mp bx_1)}\right].$$

De Vinkelrette paa Midten af Trekantens Sider have da Ligningerne

$$y + \frac{ab^2}{2(ay_1 \mp bx_1)} = \mp \frac{a}{b}\left[x - \frac{a^2 b}{2(bx_1 \mp ay_1)}\right]$$

og $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ (Normalen i Røringspunktet);

elimineres x_1 og y_1, faas Ligningen mellem Centrums Koordinater

$$4(a^2 x^2 - b^2 y^2) = (a^2 + b^2)^2,$$

der repræsenterer en Hyperbel med Halvakserne

$$\frac{a^2 + b^2}{2a} \text{ og } \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

(J. C. Carlsen.)

Om Konstruktionen som Existensbevis i den gamle græske Mathematik.

(Foredrag ved de skandinaviske Naturforskeres Møde i Kjøbenhavn 1892.)

Af H. G. Zeuthen.

Fra ældre Tid af er man tilbøjelig til at skjelne paa følgende Maade mellem de gamle Grækeres og Indernes Bidrag til den nuværende Mathematik. Man siger, at Geometrien væsentlig skyldes Grækerne, Regnekunst og dermed Arithmetiken væsentlig Inderne. Det er heller ikke urigtigt, men kan lede vild. En stor Fejltagelse vil allerede være tilstede, hvis man i Henhold til den Vej, ad hvilken man nu i Skolerne gjennem Arihmetiken kommer ind paa Algebra og ren Mathematik, tillægger Inderne større Indflydelse paa denne end Grækerne. For disse sidste var netop den geometriske Fremstillingsform, hvis Fortrin bestod i, at den lige saa godt kunde anvendes paa irrationale som paa rationale Størrelser, et Middel til en almengyldig og exakt Behandling af almindelige Størrelser. Dette forstod endnu Regiomontan, idet han siger, at Mathemathiken er Læren om Størrelser, og at den deler sig i Geometri og Arithmetik, eftersom den behandlede Størrelse er kontinuert eller en Talstørrelse.

Gaar man dybere end til Fremstillingsformen, kan man derfor bedre karakterisere det græske Bidrag til Mathematiken som den exakt ræsonerende Behandling, det indiske som den regnende Behandling. Inderne tumlede saa let med Talstørrelser, at enhver Regel strax kunde prøves paa saa mange Talexempler, at et egentligt Bevis ansaas for overflødigt. Grækerne byggede derimod enhver Sætning paa sikre Slutninger fra simplere Sætninger, og brugte den ofte kun til derpaa at bygge nye mere sammensatte Sætninger.

Idet Grækerne saaledes i deres hele Lærebygning havde logiske Formaal for Øje, maa vi heller ikke tabe disse Formaal af Sigte, naar vi rigtig ville forstaa, hvorfor de gjøre eller undlade et eller andet. Ad denne Vej er allerede de

Forhold til Infinitesimalregningen opklaret. Naar man efter dennes Opfindelse i den nyere Tid har set, at navnlig Archimedes deler sine Figurer paa samme Maade, som det sker, naar man ved Integration vil beregne deres Arealer eller Rumfang, har man undret sig over, at Grækerne ikke kunde finde paa at gjøre Skridtet fuldt ud og i Almindelighed behandle Summen af uendelig mange uendelig smaa Dele. En lignende Undren har det fremkaldt at se Archimedes ved Parablens Kvadratur faktisk gjøre Brug af en uendelig Kvotientrække uden at nævne en saadan. Sagen er, som vi kunne se af Zenons Sofismer, at Uendelighedsforestillingen, derunder specielt Forestillingen om uendelige Rækker med endelig Sum, allerede var oppe i det 5te Aarhundrede f. Chr., men blev slaaet ned som uexakt. Man vilde i det mindste i de fuldfærdige for Offentligheden bestemte Udarbejdelser ikke nøjes med en saadan almindelig Uendelighedsforestilling, som i den nyere Tid f. Ex. Cavallieri og senere L'Hopital benyttede, men sætte en exakt Begrundelse i Stedet. Eudoxos fra Knidos fandt en saadan i det saakaldte Exhaustionsbevis, som Euklid og især Archimedes senere benyttede i Behandling af de Størrelser, der for os fremkomme som Grænseværdier for en uendelig Tilnærmelse. Denne Forsigtighed kan man ikke misbillige nu, da man bruger den selvsamme Betragtningsmaade for at sikre sig Grænseværdiens Existens og Rigtighed. Der er blot den Forskjel, at man nu en Gang for alle paa den bygger et exakt Uendelighedsbegreb, som derefter fører til en paalidelig Udførelse af de enkelte Bestemmelser, medens man i Oldtiden sikrede disse hver for sig ved Exhaustionsbeviset.

Det er et andet Exempel paa Udbyttet af at have Grækernes logiske Formaal for Øje, hvorom jeg idag vil tale. Jeg vil undersøge den logiske Betydning af den geometriske Konstruktion i den græske Geometri, og denne Undersøgelse vil give os Løsning af mere end én Gaade i den gamle græske Geometri.

Har da den geometriske Konstruktion virkelig nogen anden Betydning end den umiddelbare at tilvejebringe, saavidt muligt ved Hjælp af Lineal og Passer, men ellers ved andre mekaniske Midler, den Figur, hvorom der spørges? Hertil kan bemærkes at de mekaniske Hjælpemidler overhovedet kun spiller en ringe Rolle i den græske Geometri. Idet vi foreløbig holde os til de vigtigste, saa nævner Euklid slet ikke Lineal og Passer. Han opstiller blot som Forudsætninger, hvorpaa han vil bygge, at en ret Linie kan trækkes gjennem to Punkter, en ret Linie kan forlænges, og en Cirkel tegnes med givet Centrum og med given — ved Centrum beliggende — Radius. Han forudsætter altsaa, at de saaledes bestemte rette Linier og Cirkler existere. Paa disse Forudsætninger er dernæst de følgende Løsninger af Opgaver ved geometrisk Konstruktion byggede, og de komme selv til at spille en lignende Rolle, med den Forskjel, at man nu ikke forudsætter, men beviser at Konstruktionen er rigtig, ved at føre den tilbage til de Forudsætninger, som man har opstillet. Ved i sin første Sætning at konstruere en ligesidet Trekant, beviser han saaledes, at den existerer. Han kan dernæst i Sætning 2 benytte den ligesidede Trekant til ud fra et Punkt at afsætte en Linie ligestor med en, som er opgiven et andet Sted paa Figuren, og derved falder den Indskrænkning bort ved den i Forudsætningerne opstillede Bestemmelse af en Cirkel, at Radius skal være afsat ud fra Centrum. Den Pris, som vi her se Grækerne sætte paa, at deres Forudsætninger ere saa faa og smaa som muligt, er ogsaa et Bevis paa den theoretiske Synsmaade, thi praktisk have de næppe anvendt Omvejen i Sætning 2, naar de skulde konstruere en Cirkel, hvis Radius var opgiven paa et andet Sted end Centret, men derimod uden videre taget den i Passeren, hvor den findes.

At Konstruktionens og det tilhørende Bevises Hovedformaal var at bevise Existensen, Muligheden af den søgte Figur, træder dog ikke tydeligst frem, naar vi se paa Anvendelsen til nye Konstruktioner; thi selve disse kunde jo have et

praktisk Formaal. Derimod er det værd at lægge Mærke til, at Euklid ikke i Beviset for et Theorem tør anvende f. Ex. Midtpunktet mellem to givne Punkter (1. Bog 16) uden forud at have sikret sig, at dette Punkt existerer ved (i 10) at angive, hvorledes det konstrueres. Uden denne Konstruktion vilde Existensen af Midtpunktet muligvis kunne betragtes som en Tilsnigelse.

Som første Exempel paa det Lys, min Opfattelse af Konstruktionens Betydning kaster paa forskjellige Forhold, kan jeg allerede her nævne Euklids Henførelse af visse Axiomer til Postulaterne. Jeg har allerede anført de første 3 Postulater, og ved dem have senere Udgivere gjerne villet blive staaende. Efter de nyeste og paalideligste filologiske Undersøgelser [1]) have imidlertid flere af de Paastande, som vi nu kalde Axiomer eller Grundsætninger, af Euklid selv været opstillede som Postulater eller Fordringssætninger. Jeg skal her kun nævne det berømte, efter de fleste Udgaver saakaldte 11te Axiom, Parallelaxiomet, der udsiger, at to Linier, hvis indre Vinkler med en tredie paa den ene Side af denne danne en Sum, som er mindre end to rette Vinkler, ville skjære hinanden til denne Side. At denne Sætning maa være et Postulat (5te) bliver let forstaaeligt, naar det fastholdes, at de beviste Konstruktioner ere Existens*beviser* og i Overensstemmelse hermed Postulaterne ere Existens*paastande*. Der paastaas i nærværende Tilfælde, at to rette Linier skjære hinanden, naar den anførte nødvendige Betingelse er opfyldt. Denne Forudsætning om et Punkts Bestemmelse ved 2 rette Linier er lige saa nødvendig til Konstruktion ved Linealen som den første Fordringssætning, der kræver en ret Linie bestemt ved 2 Punkter. Euklid undgaar kun den udtrykkelige Opstilling af Paastande om Skjæring mellem en ret Linie og Cirkel eller to Cirkler ved (i 1, 12 og 22) kun at benytte disse i Tilfælde, hvor Skjæringspunkternes Existens er iøjnefaldende.

Af større Vigtighed bliver dog vor Opfattelse for For-

[1]) Se Heibergs Udgave af Euklid.

staaelsen af Betydningen af de Konstruktioner, som ikke lade sig udføre ved Lineal og Passer. Blandt disse spiller Konstruktioner ved Keglesnit en saa stor Rolle, at det i det mindste i en senere Tid gjordes til en mathematisk Pligt om muligt at anvende dem, naar ret Linie og Cirkel ikke vare tilstrækkelige. Dette Fortrin kunde ikke skyldes Hensyn til mekaniske Frembringelser; thi Konkoiden er lettere at fremstille mekanisk. Heller ikke er det troligt, at man har fremstillet dem ved Snit i stereometriske Modeller, ligesaalidt som det kan antages, at Archytas' ældre Konstruktion af to Mellemproportionaler ved Skjæring mellem en Kegleflade og en Kurve, som udskjæres paa en Cylinderflade ved en Tore, er udført i det virkelige Rum. En saa sammensat Konstruktion kan kun have haft en rent theoretisk Betydning. Men hvilken? Den giver et Bevis for, at de to Mellemproportionaler existere, et Bevis af samme Art som det, Euklid har anset det for nødvendigt at give for Midtpunktets Existens, førend han benytter Midtpunkter i theoretiske Beviser.

Det Fortrin, som tillagdes Keglesnittene i geometriske Konstruktioner, kan nu vel, som i min Bog om Keglesnitslæren i Oldtiden, forklares derved, at den udviklede Keglesnitslære gav rigelige Midler til Diskussion og til saadanne theoretiske Undersøgelser, som skulde knyttes til Konstruktionerne; men denne Læres første Fremkomst og hastige Udvikling forstaas bedst ved den her givne Forklaring af den geometriske Konstruktions logiske Betydning. Derved ville nogle Forklaringer, som jeg i samme Bog har givet af nogle dunkle Sider af Keglesnittenes ældste Historie paa en Gang vinde i Bestemthed og Sandsynlighed.

Keglesnittenes Opfindelse ved Menaichmos skal særlig have været knyttet til deres Anvendelse til Konstruktion af de to Mellemproportionaler ved Skjæring mellem to af de Kurver, der i retvinklede Koordinater fremstilles ved Ligningerne

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab.$$

Da de Gamle til Udledelse af Keglesnittenes enkelte Egen-

skaber bestandig bruge deres Ligninger — eller de Bestemmelser som geometriske Steder i Planen, som vi opskrive i Form af Ligninger — er det ikke underligt, at de ogsaa i Tiden, før deres stereometriske Fremstilling blev fundet, have undersøgt de her nævnte Kurver, hvis Anvendelse til Konstruktion af de to Mellemproportionaler fremgaar umiddelbart af disses Definition. Herved var dog en væsentlig logisk Mangel. Man vidste ikke, eller man mente ikke at have Lov til at vide, at disse Kurver existere, at altsaa deres Punkter, hvoraf man ganske vist kunde konstruere et saa stort Antal, som man vilde, danne en kontinuert Kurve. Man syntes altsaa at have Brug for et nyt Postulat af samme Art som dem, hvorved ret Linie og Cirkel indføres. Denne Vanskelighed var det Menaichmos hævede paa en Maade, der tilfredsstillede Grækerne, idet han fremstillede Kurverne som Snit i Kegler. Ifølge den Maade, hvorpaa Keglen defineres ved Hjælp af Cirklen, der forud er postuleret, bliver Keglefladen en kontinuert Flade, og derved blive Snit i samme kontinuerte Kurver.

Da man efter denne Opfattelse forud har beskjæftiget sig med de ved Ligningerne fremstillede Parabler og Hyperbler, bliver det ad denne Vej forstaaeligt, at der allerede hos Menaichmos er Tale om Hyperblens Asymptoteligning $xy = ab$. Denne selv har han nemlig ganske sikkert ikke kunnet udlede af Betragtning af Hyperblen paa selve Keglen, medens dette godt kan have været Tilfældet med Omformninger af en Ligning, som kunne have været kjendte forud.

Endnu større Vægt lægger jeg dog paa den Forklaring, som man nu faar af Beretningen om, at Grækerne lige indtil Apollonios kun fremstillede Ellipse, Parabel og Hyperbel som Snit ved Planer vinkelrette paa en Frembringer i en Omdrejningskegle, en Frembringelsesmaade, hvortil de gamle Navne: Snit i den spids-, ret- og stumpvinklede Kegle knyttede sig. Naar man endog har opfattet dette saaledes, som om man indtil Apollonios ikke vidste, at de

samme Kurver ogsaa kunne fremstilles paa anden Maade som Snit i cirkulære Kegler, er dette urigtigt; thi det viser sig, at Archimedes kjender og med stor Sikkerhed behandler alle mulige elliptiske Snit ej blot i Omdrejningskegler, men ogsaa saadanne elliptiske Snit i skjæve cirkulære Kegler, hvis Planer staa vinkelret paa Keglens Symmetriplan. Ikke desto mindre trænger det til en Forklaring, at man saa længe og saa bestemt har udmærket Snittene vinkelrette paa en Frembringer.

Denne Forklaring vil man ikke finde ad den Vej, ad hvilken det tidligere har ligget nærmest at søge den, nemlig ved at antage, at Grækerne skulde have kjendt en saadan Undersøgelsesmaade, ved hvilken de kunde finde Egenskaberne ved Snit vinkelrette paa en Frembringer uden strax at bemærke, at andre Snit have samme Egenskaber. En saadan Undersøgelsesmaade skal man have ondt ved at opfinde, og jeg kan tilføje, at det ingenlunde bliver lettere, naar man ved at trænge ind i den græske Keglesnitslære lærer de Midler grundig at kjende, som de overhovedet plejede at anvende. Af det her anførte forstaas det imidlertid, at Opgaven for dem var en helt modsat, nemlig den at skaffe sig Ret til at betragte Kurver, hvis Ligninger man forud kjendte, som virkelige kontinuerte Kurver. Man skulde gjennem Keglesnitslinier med given Axe og Parameter lægge en cirkulær Kegle, og naar man blot havde én Løsning af denne Opgave, kunde man dernæst, saaledes som man vitterlig gjorde, bygge Læren om Kurverne videre paa Ligningen. Det gjaldt da — naar man ikke som Archimedes forfulgte andre Formaal end en Udvikling af selve Keglesnitslæren — kun om at have en enkelt Løsning af den stereometriske Opgave, og man havde al mulig Grund til at være tilfreds med den, som Menaichmos engang havde funden ved at tænke sig Snitplanen vinkelret paa en Frembringer. I et Snit gjennem Toppunktet vinkelret paa en saadan Snitplan bliver nemlig det Stykke som afskjæres mellem de to Frembringere Hovedaxen, og »Stykket indtil [illegible] e Parameter. Herved lader den til en

given Ellipse, Parabel eller Hyperbel hørende Kegle sig let konstruere, og det ses altsaa, at enhver af disse Kurver kan frembringes som Snit i en Kegle. Dette var det tilsigtede Formaal.

I det Foregaaende er især fremdraget saadanne Konstruktioner, som nærmest kun fik en formel Betydning, for saavidt som Ingen virkelig vilde tvivle om Existensen eller Muligheden af det, som Konstruktionen skulde tilvejebringe. En større reel Betydning faar Konstruktionen i saadanne Tilfælde, hvor Muligheden kun er tilstede, naar visse Mulighedsbetingelser ere opfyldte. Saadanne Tilfælde fremstillede de Gamle noget anderledes, end vi nu tildags gjøre det. Nu begynder man med at angive, hvorledes Opgaven maa løses, hvis den i det hele skal kunne løses. Til denne Løsning knyttes dernæst en Diskussion, hvori der gjøres Rede for, under hvilke Betingelser den kan løses, og hvor mange Opløsninger den kan faa i de forskjellige Tilfælde, hvor den er mulig. De Gamle derimod lode Mulighedsbetingelserne gaa forud for Opgaven, idet de i en foregaaende Sætning beviste, at disse Betingelser vare nødvendige. Dernæst stilledes Opgaven udtrykkelig kun med den Begrænsning, som Betingelserne paabød, løstes, og Løsningens Rigtighed bevistes. Derved — og det betragter jeg i de fleste Tilfælde som Konstruktionernes egentlige Formaal — var det godtgjort, at Betingelserne tillige vare tilstrækkelige.

Naar saaledes Euklid i første Bog først viser, hvilke Betingelser Siderne i en Trekant nødvendigvis maa tilfredsstille, og dernæst konstruerer en Trekant, hvis Sider ikke ere andre Betingelser underkastede end disse, beviser han i Virkeligheden, at Betingelserne ere nødvendige og tilstrækkelige. Paa lignende Maade i andre Tilfælde.

Herved forstaas det, at Grækerne, naar en Opgave stilles, ere saa omhyggelige for strax i den saakaldte Diorisme at begrænse den saaledes, at den virkelig bliver mulig, men at de derimod i Reglen ikke give Oplysninger om, hvor

mange Opløsninger den har. At stille en ikke behørig afgrænset Opgave vilde nemlig for dem omtrent være det samme som at paastaa, at de uden denne Afgrænsning utilstrækkelige Betingelser vare tilstrækkelige. Tilvejebringelsen af en enkelt Opløsning af en behørig afgrænset Opgave er derimod et gyldigt Bevis for, at de i Afgrænsningen opstillede Betingelser ere tilstrækkelige, og det var det, man vilde have bevist. At man iøvrigt ikke, hvor det virkelig spillede en Rolle, var saa blind, som det har været paastaaet, for Betydningen af, at en Opgave kan have flere Opløsninger, har jeg vist i mit før anførte Skrift.

Om Roduddragning.

(Af P. V. Jensen, cand. polyt., Maler.)

Da den almindelig brugte Fremgangsmaade til Forklaring af den praktiske Roduddragning synes mig lidet anskuelig, idet den navnlig lider under den Fejl, at begynde med den specielle Talregning og ende med Roduddragning af Polynomier, vil jeg nedenstaaende forsøge en Fremstillingsmaade, der gaar den omvendte Vej.

Først udvikles:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\ &= (a+b)^2+(2a+2b+c)c\\ &= a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c.\end{aligned}$$

Ved istedetfor a at sætte a_1+a_2 indser man at denne Formel gjælder for Udvikling af Kvadratet paa enhver flerleddet Størrelse.

Roduddragning følger da saaledes:

$$
\begin{array}{l}
a)\ \sqrt{a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c}\ (a+b+c \\
\quad \underline{a^2} \\
2a+b)\ (2a+b)b \\
\qquad\quad \underline{(2a+b)b} \\
\qquad\qquad 2a+2b+c)\ (2a+2b+c)c \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{(2a+2b+c)c} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Eksempel:

$$
\begin{array}{r|l}
a & \sqrt{4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1}\ \overset{a}{(2x^2} \overset{b}{- 3x} \overset{c}{+ 1} \\
2x^2 & \underline{4x^4} \\
\hline
2a+b & -12x^3 + 13x^2 \\
4x^2 - 3x & \underline{-12x^3 \pm 9x^2} \\
\hline
2a+2b+c & 4x^2 - 6x + 1 \\
4x^2 - 6x + 1 & \underline{4x^2 - 6x + 1} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Betegner

$a + b + c + d$ et 4-ciffret Tal eller $a . 103 + b . 10^2 + c . 10 + d$

da vil $(a+b+c+d)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c$

$\qquad + (2a + 2b + 2c + d)d$

betegne $\qquad a^2 . 10^6 + (2a . 10^3 + b . 10^2) b . 10^2$

$\qquad + (2a . 10^3 + 2b . 10^2 + c . 10) c . 10$

$\qquad + (2a . 10^3 + 2b . 10^2 + 2c . 10 + d) . d$

eller $\qquad a^2 . 10^6 + (2a . 10 + b) . b . 10^4$

$\qquad + (2a . 10^2 + 2b . 10 + c) c . 10^2$

$\qquad + (2a . 10^3 + 2b . 10^2 + 2c . 10 + d) d.$

Lader man inden for hver Klamme Leddenes Værdi betegnes ved deres Orden, som i Titalsystemet, vil ovenstaaende Størrelse simplificeres saaledes:

$$a^2 . 10^6 + (2a + b) . b . 10^4 + (2a + 2b + c) c . 10^2$$
$$+ (2a + 2b + 2c + d) . d.$$

Vil man da i det Tal, hvis Rod skal uddrages, udskille Dele, som svare til Leddene i denne Størrelse, maa man efterhaanden dividere med 10^6, 10^4, 10^2 (inddele Tallet i Klasser med 2 Ciffre i hver). Roduddragning foregaar da nøiagtig paa samme Maade som foran ved Polynomiet.

		$a + b + c + d$
Eksempel. a	$\sqrt{74\,40\,78\,76}$ (	8 . 6 2 6
8	64	$a^2 \cdot 10^6$
$2a + b$	1040	
16 6	996	$(2a + b) \cdot b \cdot 10^4$
$2(a + b) + c$	4478	
172 2	3444	$(2a + 2b + c)\, c \cdot 10^2$
$2(a + b + c) + d$	103476	
1724 6	103476	$(2a + 2b + 2c + d)\, d$
	0	

Kubikrodsuddragning spiller i det praktiske Liv en meget beskeden Rolle, og der kunde være god Grund til at udelade den helt af den elementære Undervisning; den kan simplificeres ved en lignende Fremgangsmaade som den ved Kvadratrod anvendte.

Først udvikles:

$$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + [3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2]\, c$$
$$= a^3 + [3a^2 + 3ab + b^2]\, b$$
$$+ [3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2]\, c.$$

Tillige erindres at $3(a + b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2$, saa at man faar 1ste Led i Faktoren til c ved at multiplicere Leddene i Faktoren til b, henholdsvis med 1, 2 og 3.

Eksempel: (Se næste Side.)

Betegner

$a + b + c + d$ et 4-ciffret Tal eller $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$

vil $$(a + b + c + d)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)\, b$$
$$+ [3(a + b)^2 + 3(a + b)c + c^2]\, c$$
$$+ [3(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)d + d^2]\, d$$

betegne $$a^3 \cdot 10^9 + (300a^2 + 30ab + b^2)\, b \cdot 10^6$$
$$+ [300(a + b)^2 + 30(a + b)c + c^2]\, c \cdot 10^3$$
$$+ [300(a + b + c)^2 + 30(a + b + c)d + d^2]\, d.$$

Lader man inden for hver [ ] Leddenes Værdi betegnes ved deres Orden, som i Titalsystemet, vil ovenstaaende Størrelse simplificeres saaledes:

$$\sqrt[3]{x^9 - 9x^8 + 36x^7 - 84x^6 + 126x^5 - 126x^4 + 84x^3 - 36x^2 + 9x - 1} \;\left(\overset{a}{x^3} \overset{+\,b}{- 3x^2} \overset{+\,c}{+ 3x} \overset{+\,d}{- 1}\right.$$

$$a^2 = x^6 \quad\Big|\quad x^9$$

$$3a^2 = 3x^6 \text{ (divider)} \quad\Big|\quad -9x^8 + 36x^7 - 84x^6$$

$$3ab = -9x^5$$

$$b^2 = 9x^4$$

$$3x^6 - 9x^5 + 9x^4 \quad\Big|\quad -9x^8 \pm 27x^7 \mp 27x^7$$

$$3(a+b)^2 \begin{cases} 3a^2 = 3x^6 \text{ (divider)} \\ 6ab = -18x^5 \\ 3b^2 = 27x^4 \end{cases} \quad\Big|\quad 9x^7 - 57x^6 + 126x^5 - 126x^4 + 84x^3$$

$$3(a+b)c = 9x^4 - 27x^3$$

$$c^2 = 9x^2$$

$$3x^6 - 18x^5 + 36x^4 - 27x^3 + 9x^2 \quad\Big|\quad 9x^7 \mp 54x^6 \pm 108x^5 \mp 81x^4 \pm 27x^3$$

$$3(a+b+c)^2 \begin{cases} 3(a+b)^2 = 3x^6 - 18x^5 + 27x^4 \text{ (divider)} \\ 6(a+b)c = 18x^4 - 54x^3 \\ 3c^2 = 27x^2 \end{cases} \quad\Big|\quad -3x^6 + 18x^5 - 45x^4 + 57x^3 - 36x^2 + 9x - 1$$

$$3(a+b+c)d = -3x^3 + 9x^2 - 9x$$

$$d^2 = +1$$

$$3x^6 - 18x^5 + 45x^4 - 57x^3 + 36x^2 - 9x + 1 \quad\Big|\quad -3x^6 + 18x^5 - 45x^4 + 57x^3 - 36x^2 + 9x - 1$$

$$0$$

$$a^3 . 10^9 + (3a^2 + 3ab + b^2) . b . 10^6$$
$$+ [3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2]\, c . 10^3$$
$$+ [3(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)d + d^2]\, d.$$

I det Tal, hvis Kubikrod skal findes, maa man da efterhaanden udskille Dele der svarer til Leddene i denne Størrelse ved Divisjon med 10^9, 10^6, 10^3. (Dele Tallet i Klasser med 3 Ciffre i hver.)

Eksempel.

	$\sqrt[3]{2\,024\,284\,625}$	$\overset{a\ b\ c\ d}{(1\ 2\ 6\ 5}$
	1	$a^3 . 10^9$
$3a^2 = 3$ (divider)	1 024	
$3ab = 6$		
$b^2 = 4$		
$3a^2 + 3ab + b^2 = 364$	728	$(3a^2 + 3ab + b^2)\, b . 10^6$
$3ab = 6$		
$2b^2 = 8$		
$3(a+b)^2 = 432$ (divider)	296 284	
$3(a+b)c = 216$		
$c^2 = 36$		
$3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2 = 45396$	272 376	$[3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2]\, c . 10^3$
$3(a+b)c = 216$		
$2c^2 = 72$		
$3(a+b+c)^2 = 47628$ (divider)	23 908 625	
$3(a+b+c)d = 1890$		
$d^2 = 25$		
4781725	23 908 625	$= [3(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)d + d^2]\, d.$
	0	

Sammenlign Jul. Petersens Algebra, II Del.

Danske Eksamensopgaver.

Skolelærerinde-Eksamen.

(Oktober 1892.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A kjøber Rug og Byg, ialt 612 Tdr. 4 Skpr. og giver 2 Kr. 20 Øre mere for 1 Tønde Rug end for 1 Tønde Byg. Omkostningerne ved Indladningen ere 102 Kr. 35 Øre, og i Fragt til England betales $8\frac{1}{3}$ pCt. af de før nævnte Udgifter (Indkøbspris med Omkostninger). Under Vejs svinde begge Kornsorter $\frac{1}{49}$, hvorefter Rugen sælges for $18\frac{4}{7}$ sh., $\frac{2}{3}$ af Byggen for 18 sh., og Resten for 16 sh., alt pr. Tønde. Havde A faaet samme Pris pr. Tønde for Byggen, som han fik for Rugen, vilde han ved Handelen have tjent 25 pCt., hvorimod han nu kun tjente $21\frac{1}{6}$ pCt.

I. Hvor stor var hans Fortjeneste?

II. Hvor mange Tønder havde han kjøbt af hver Sort?

III. Hvad var Indkjøbsprisen pr. Tønde.

(1 Lstrl. = 20 sh. = 17 Kr. 50 Øre.)

Opløsning. Der er solgt $612\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{49} = 600$ Tdr. til en Pris af $\frac{600\cdot 18\frac{4}{7}\cdot 121\frac{1}{6}}{125} = 10801\frac{1}{7}$ sh. $= 9451$ Kr.

Fortjenesten $= \frac{9451\cdot 21\frac{1}{6}}{121\frac{1}{6}} = 1651$ Kr. (I).

Salgsprisen for Byggen er i Gennemsnit $17\frac{1}{3}$ sh. for Tønden altsaa er der solgt

$$\frac{10801\frac{1}{7} - 600\cdot 17\frac{1}{3}}{18\frac{4}{7} - 17\frac{1}{3}} = 324 \text{ Tdr. Rug}$$

og købt $324\cdot\frac{49}{48} = 330\frac{3}{4}$ Tdr. Rug og $281\frac{3}{4}$ Tdr. Byg (II)

Indkøbsprisen for alt Kornet har været

$$(9451 - 1651)\frac{100}{108\frac{1}{3}} - 102{,}35 = 7097{,}65,$$

en Tønde Byg har kostet i Indkøb

$$\frac{7097,65 - 2,20 \cdot 330\frac{3}{4}}{612\frac{1}{2}} = 10,40 \text{ Kr.}$$

og en Tønde Rug 12,60 Kr. (III)

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

Til et Vejanlæg afgive A, B og C tilsammen 22,77 Tønder Land og modtage derfor i alt 11,934 Kr. Hvorledes skal denne Erstatning deles mellem dem:

I. Hvis A afgiver 8,25 Tdr. Land, B 6,6 Tdr., C Resten, og 2,5 Tdr. Land af A's Jord have samme Værdi som 3,5 Tdr. af B's, og 1,2 Tdr. af B's samme Værdi som 0,96 Td. af C's?

II. Hvis A afgiver 2,5 Gange saa megen Jord som B., og C 4,95 Tdr. Land flere end B, og Forholdet mellem Værdierne pr. Td. Land er som i I?

III. Hvis de af A, B og C afgivne Tønder Land forholde sig = 8 : 6 : 9, og Værdierne pr. Td. Land som 3 : 5 : 7?

IV. Hvis A afgiver 3,96 Tdr. Land mere end B, denne 1,98 Tdr. mere end C, og Jordenes Godhed staar i samme Forhold som Antallet af de afgivne Tønder Land?

Opløsning. I. Afgiver A 8,25 Tdr., B 6,6 Tdr. og C 7,92 Tdr., er Forholdet mellem Afstaaelserne som 25 : 20 : 24, og da Forholdet mellem Værdierne er som $3,5 : 2,5 : \frac{2,5 \cdot 1,20}{0,96}$ $= 28 : 20 : 25$, bliver Erstatningen at dele i Forholdet $25 \cdot 28 : (20 \cdot 20) : (24 \cdot 25) = 7 : 4 : 6$.

A faar altsaa $11934 \cdot \frac{7}{17} = 4914$ Kr., B $11934 \cdot \frac{4}{17}$ $= 2808$ Kr. og C 4212 Kr.

II. Afgiver A $\frac{(22{,}77 - 4{,}95)\,2\,.\,2{,}5}{9} = 9{,}9$ Tdr., B 3,96 Tdr. og C 8,91 Tdr., er Forholdet her imellem som 10 : 4 : 9, og da Forholdet mellem Værdierne er som ovenfor skal Erstatningen deles i Forholdet 10 . 28 : (4 . 20) : (9 . 25) eller som 56 : 16 : 45. A faar saaledes $11934 \,.\, \frac{56}{117} = 5712$ Kr., B $11934 \,.\, \frac{16}{117} = 1632$ Kr. og C 4590 Kr.

III. Erstatningen skal deles i Forholdet 8 . 3 : (6 . 5) : (9 . 7) = 8 : 10 : 21; A faar $11934 \,.\, \frac{8}{39} = 2448$ Kr., B $11934 \,.\, \frac{10}{39}$ = 3060 Kr. og C 6426 Kr.

IV. A afgiver $\frac{22{,}77 + 2\,.\,3{,}96 + 1{,}98}{3} = 10{,}89$ Tdr., B 6,93 Tdr. og C 4,95 Tdr. Forholdet er som 11 : 7 : 5, og Erstatningen deles i Forholdet 121 : 49 : 25; A faar $11934 \,.\, \frac{121}{195} = 7405{,}2$ Kr., B $11934 \,.\, \frac{49}{195} = 2998{,}8$ Kr. og C 1530 Kr.

N. B.

Opgaver til Løsning.

145. At bestemme en Cirkelbue, som deles i n ligestore Dele ved Radier gennem Kordens tilsvarende Delingspunkter. Sp. n = 3; 4.

(— ⏑ ⏑)

146. ABC er en ligebenet Trekant. AB = BC = 20′, AC = 24′. AD er en Diameter i Trekantens omskrevne Cirkel. Bestem de indskrevne Cirklers Radier i Trekanterne ABC, ABD, ACD og BCD.

(A. S. Bang.)

Begrebet „geometrisk Sted".

Af Chr. Hansen.

Af de Indvendinger, der ere gjorte mod den af Knud Christensen og Karl Schmidt udgivne Geometri, er der vel ingen, der mere fortjene Opmærksomhed end de, der angaa Definitionen af Begrebet »geometrisk Sted«, fordi dette Begreb paa Grund af den overvejende Rolle, det spiller i Geometrien, ikke taaler at bibringes Eleverne i en forplumret Skikkelse. Denne Definition lyder i den nævnte Bog saaledes: »Et geometrisk Sted er en eller flere Linier, hvis Punkter alle opfylde en given Betingelse.«

Herom siges i den officielle Skrivelse A: »Sætningens Form er upædagogisk, men værre er det, at Definitionen er falsk. Stedet skal indeholde alle de Punkter o. s. v. Fejlen er ikke tilfældig; thi hvor der senere nævnes geometriske Steder, mangler den ene Halvdel af Beviset (43 og 68)«. I samme Skrivelse siges fremdeles: »Der er intet mere ødelæggende for en begavet Drengs Udvikling end det, at han skal bringes til at tro paa Rigtigheden af et Bevis, som han dog føler, at han ikke kan forstaa, og man maa ikke tro, at saadanne Elever ere sjeldne Undtagelser; Erfaringen har vist mig, at den logiske Sans tidt kan være stærkt udviklet forbavsende tidligt«. I »Bemærkninger til to officielle Skrivelser« siges endelig: »Definitionen af geometrisk Sted hører til de grove Fejl. Forfatternes Forsøg paa at vælte Skylden over paa mig lykkes ikke; selv om de ville anse min Bog som Norm, hvad Omfanget angaar, kunne muligvis deri forekommende Fejl dog vel ikke tages som Norm for, hvorledes Beviser skulle føres. Heldigvis blive Forfatterne i udelukkende Besiddelse af Fejlen; jeg har den rigtige Definition og kan derfor godt lade Eleverne gaa lidt paa egen Haand efter de givne Anvisninger«.

Med disse korrekte Anker og dertil knyttede Bemærkninger in mente turde det være af Interesse at sammenholde de

Definitioner af Begrebet »geometrisk Sted«, som af forskellige ansete Geometriforfattere til forskellige Tider ere fremsatte.

1. Oppermann (1845): »Ved et geometrisk Sted forstaas i Plangeometrien en plan Linie af den Beskaffenhed, at en vis Betingelse tilfredsstilles af hvert Punkt i den og ikke af noget andet Punkt i Planen.«
2. Ramus (1850): »Naar et Punkt søges, som skal opfylde en forelagt Betingelse, vil det ofte forekomme, at Punktet er saaledes ubestemt, at alle de, som ligge i en vis ret eller krum Linie udelukkende opfylde Betingelsen. Denne Linie kaldes da Punktets geometriske Sted.«
3. Rouché & Comberousse (1865): »I Plangeometri kalder man geometrisk Sted den Figur, der dannes af Indbegredet af de Punkter i Planet, som have en fælles Egenskab.«
4. Julius Petersen (1890): »For at et Punkt skal være bestemt, maa der være givet to Betingelser, som det skal opfylde; hvis der kun er givet een Betingelse, bliver der uendelig mange Punkter, der løse Opgaven, men disse ligge alle i en vis ret eller krum Linie, som kaldes Punktets geometriske Sted.«

Eet væsentligt er der, hvori disse fire Definitioner stemme overens, nemlig at et geometrisk Steds Punkter alle skulle opfylde een fælles Betingelse, og det er derfor en for alle fire Definitioner fælles Svaghed, at de hvile paa et Begreb, der hverken i nogen af de paagældende Lærebøger eller i nogen anden mig bekendt elementær Geometri er klaret for Eleverne nemlig Begrebet »een Betingelse«. Mon det da virkelig kan forudsættes, at enhver Elev, for hvem en af disse Definitioner præsenteres, a priori har den i geometrisk Henseende rette Opfattelse af, hvilken Egenskab ved et Punkts Beliggenhed der udgør een Betingelse, og hvilken der spalter sig i to eller tre o. s. v.? Jeg vover at betvivle det og vover derfor at paastaa, at man, hvis slig apriorisk Viden hos Eleverne kunde forudsættes, maatte kunne stryge adskillige andre For-

klaringer, som man hidtil har anset for at være pædagogisk fornødne. Medens f. Eks. ingen Elev vil tvivle om, at det, at et Punkts Afstande fra tre givne Punkter eller rette Linier skulle have en given Sum, kun er een Betingelse, vil den Fordring, at de nævnte Afstande skulle være lige store, hvilket for ham ogsaa lyder som een Betingelse, næppe af ham erkendes at være to Betingelser, før Læreren aabenbarer ham, at der skal to Ligninger til at bringe den paa Papiret. Det er kort sagt en for alle fire Definitioner fælles pædagogisk Fejl, at de holde det hemmeligt for Eleverne, at en Egenskab ved et Punkts Beliggenhed udgør n Betingelser, naar der kræves n Ligninger for at udtrykke den. En enkelt af de fire Forfattere har været ærlig nok til at tilstaa, at han efter at have givet Eleverne »den rigtige Definition« ikke tager i Betænkning at lade dem gaa med den »lidt paa egen Haand efter de givne Anvisninger«, men en endnu større Ærlighed vilde det sikkert have været, om alle fire Forfattere havde tilstaaet, at de ved at give Eleverne en paa et ikke for dem klaret Begreb hvilende Definition lade dem gaa helt paa egen Haand uden givne Anvisninger; thi naar den af Forfatterne, der i Indledningen til sin Definition udtrykkelig skelner imellem een og to Betingelser, fortæller Eleverne, at der maa to Betingelser til at bestemme et Punkt, og at een Betingelse giver uendelig mange Punkter, der alle ligge i en vis ret eller krum Linie, da have Eleverne snarere faaet ret gode Anvisninger til at tvivle om, at det er »den rigtige Definition«, de her have med at gøre, eftersom de jo paa deres elementære Trin ikke kunne forstaa, at der er uendelig mange Punkter, der opfylde den ene Betingelse at have fra et givet Punkt Afstanden nul, og lige saa lidt kunne forstaa, at de Punkter, der opfylde den ene Betingelse at have fra en given Cirkel en Afstand lig Radius, alle ligge i een krum Linie.

Men selv om den manglende Oplysning føjes til alle fire Definitioner, beholde de dog et eller andet Mellemværende. De to, der skarpest modsige hinanden, ere aabenbart 2 og 4,

idet 2 siger, at et Punkt, som opfylder en given Betingelse, ofte ligger, medens 4 siger, at det altid ligger i en vis ret eller krum Linie, som da kaldes Punktets geometriske Sted. Dog trods denne skarpe Modsigelse i en enkelt Henseende synes de paagældende to Forfattere at være enige i, at det, som man kalder et Punkts geometriske Sted, aldrig er mere end een Linie. Denne Overensstemmelse er imidlertid rent forbigaaende og derfor kun tilsyneladende, idet de begge have leveret sort paa hvidt for, at de trods deres Definitioners næsten ordrette Overensstemmelse (i dette Punkt) netop ere enige i, at et geometrisk Sted godt kan bestaa af to Linier; thi paa toliniede geometriske Steder har Ramus anført Eksempler endog paa den samme Side (98), paa hvilken han tilsyneladende (for Eleverne) definerer ethvert geometrisk Sted som enliniet, og i sine »Metoder og Teorier« har Jul. Petersen ligeledes flere Eksempler paa toliniede geometriske Steder ja endog et Eksempel paa et firliniet, der i 1ste Udgave sagdes at »frembyde et interessant Fænomen«, en Bemærkning, der ogsaa kan fortolkes paa en anden Maade end den tilsigtede; thi for Elever, der have faaet et geometrisk Sted defineret som altid enliniet, maa et toliniet allerede være og et firliniet da end mere være et interessant eller rettere sagt forbavsende Fænomen.

Altsaa er tilsyneladende (for Eleverne, især de stærkt logisk udviklede) hverken 2 eller 4 »den rigtige Definition«; men det er ogsaa heldigvis kun tilsyneladende, hvilket Eleverne selv ville komme til at indse, hvis de vente med at afslutte deres matematiske Studium, indtil de faa lært lidt analytisk Geometri og derved faa lært, at to rette Linier ere »en Linie« af 2den Grad, hvis Lignings Koefficienter staa i en vis særegen Afhængighed af hverandre, at to Cirkler eller fire rette Linier ere »en Linie« af 4de Grad ligeledes med specielle Forbindelser imellem Ligningens Koefficienter. Men saa længe maa ogsaa Eleverne vente med at forstaa, hvorfor Definitionerne 2 og 4 ere rigtige, skønt de synes urigtige, fordi de

fra et elementært Standpunkt betragtede ikke synes at indbefatte alle de Tilfælde, paa hvilke de anvendes.

Definitionen 1 gør det klart for Eleven, at det geometriske Sted for et Punkt, der har en given Afstand fra en given ret Linie, ikke er en ret Linie parallel med denne i den givne Afstand, da der jo i det givne Plan foruden en saadan Parallel er endnu en, der opfylder Betingelsen, og lige saa klart maa det staa for Eleven, at det paagældende geometriske Sted heller ikke er Indbegrebet af begge disse Paralleler, da et geometrisk Sted jo ifølge Definitionen er »en Linie«; altsaa det geometriske Sted for et Punkt med given Afstand fra en given ret Linie bliver for de paa det elementære Trin staaende Elever af denne Definition bortdefineret, hvilken Skæbne følgelig ogsaa rammer Stedet for et Punkt med lige store Afstande fra to rette Linier o. s. v. Men de Elever, der ere komne lidt ind i den analytiske Geometri, kunne jo glæde sig ved at indse, hvor udspekuleret rigtig ogsaa denne Definition er. Da det jo imidlertid kun er meget faa af Eleverne, der naa saa vidt, vil det vel ikke være for dristigt at paastaa, at Definitionerne 1, 2 og 4 have en upædagogisk Form derved, at de bruge Udtrykket »en Linie« i Stedet for »en eller flere Linier«.

Men saa Nr. 3? Den er jo af en anden Kvalitet end enhver af de andre. Jeg har i en anden Afhandling udtalt den Anskuelse, at, naar man i Geometrien betjener sig af et Ord, der i det daglige Sprog er meget anvendt og i dette har en aldeles bestemt Betydning, da bør denne Betydning respekteres. Dette gælder her om Ordet »Sted«; naar man taler om »Stedet« for et Punkt, der opfylder en given Betingelse, vil det da ikke være lige saa geometrisk som sproglig naturligt derved at forstaa Indbegrebet af alle de Punkter i Rummet, hvormed et saadant Punkt kan falde sammen? Og vil det ikke derfor ogsaa være pædagogisk naturligt? En saadan Definition er Nr. 3, der, naar »Plangeometri« ombyttes med »Geometri« og »i Planet« stryges, omfatter alt, intet tilsyneladende Udtryks Forsvarlighed skjuler under den analytiske

Kappe, kort sagt gaar fyldigt, simpelt og klart til Værks. Den gør det i sine faa og tydelige Ord indlysende for Eleverne, at et Punkts geometriske Sted kan være ikke blot et Punkt, en eller flere Linier, en eller flere Flader, et eller flere Legemer men tilmed hele Planet eller hele Rummet, ja endog ingen af Delene eller ikke eksistere.

Søges f. Eks. Stedet for et i en given Trekants Plan liggende Punkt, hvis Afstande fra Siderne multiplicerede med disse have en given Sum s, idet Afstandene regnes positive eller negative, eftersom de og Trekanten falde til samme eller modsat Side, da vil Stedet slet ikke eksistere, hvis $s \lessgtr 2F$, Trekantens dobbelte Fladeindhold, men udgøre hele Planet, hvis $s = 2F$. Et lignende Eksempel haves i Rummet med Hensyn til et Tetraeder.

Dog skal jeg selvfølgelig indrømme, at ogsaa Definitionen 3 [1]) kunde have en mere pædagogisk Form, hvilket den formentlig vilde have, hvis den lød saaledes: »Ved det geometriske Sted for et Punkt, der opfylder en given Betingelse, forstaas den Figur, der indeholder alle de Betingelsen opopfyldende Punkter og ingen andre.«

Af danske Forfattere er der endnu to, som det vilde være urigtigt ved denne Lejlighed at forbigaa, om ikke af anden Grund, saa af den, at deres Lærebøger i Geometri i en lang Aarrække have været, dog just ikke lige meget, udbredte i vore Skoler. Hos dem træffe vi følgende Definitioner:

5. Mundt (1870) [2]): »Naar en ubestemt Opgave gaar ud paa at bestemme et Punkts Beliggenhed, er det ofte Tilfældet, at der vel gives uendelig mange Punkter, som fyldestgøre Opgaven, men at disse i Forening danne en Linie (ret eller krum). En saadan Linie, som indeholder alle de

---

[1]) I Originalsproget lyder den saaledes: »En géométrie plane, on donne le nom de lieu géométrique à la figure formée par l'ensemble des points du plan qui jouissent d'une propriété commune.«

[2]) 8de Udgave.

Punkter, der fyldestgøre en ubestemt Opgave, kaldes et geometrisk Sted.«

6. Steen (1873)[1]: »I Plangeometrien forstaar man ved det geometriske Sted for alle de Punkter, der opfylde visse Betingelser, den Linie, hvorpaa alle saadanne Punkter ligge.«

Hvor grundforskellige disse to Definitioner end ere fra hinanden og den sidste tillige fra alle de fire andre, er der dog den Lighed imellem dem indbyrdes og imellem dem og tre af de andre, at de bruge det upædagogiske Udtryk »Linie« i Stedet for »Linie eller Samling af Linier«. I øvrigt giver Nr. 5 paa Grund af sin væsentlige Overensstemmelse med Nr. 2 ikke Anledning til særskilt Betragtning, hvilket derimod i højeste Grad turde være Tilfældet med Nr. 6.

Een væsentlig Afvigelse mellem Nr. 6 og alle de fem andre Definitioner er, at den ikke som alle disse taler om een Betingelse men om »visse (altsaa flere) Betingelser« og tilmed ikke saa meget som antyder, at disse skulle være fælles for alle Punkter i det geometriske Sted, hvilket dog vel maa antages at have været Forfatterens Mening. Men Nr. 6 er tillige »ejendommelig« (jvnfr. Bogens Fortale) i Henseende til sit Slutningsudtryk »hvorpaa alle saadanne Punkter ligge«; ja hvor ejendommelig denne Definition er bleven ved det, som ved den er »ejendommeligt«, ses klart af et Eksempel.

Lad os antage, at et Punkt underkastes saadanne »visse Betingelser« som de to at skulle have fra et givet Punkt en given Afstand og fra et andet givet Punkt en anden given Afstand. Punktet ligger da i enhver af to Cirkler og kan altsaa være hvilket som helst af disses højest to Fællespunkter. Der vilde da være, om end en fra de fire andres afvigende og med den femtes overensstemmende, Mening i Definitionen, dersom den blot havde en Antydning af, at det geometriske Sted for det Punkt, der opfylder Betingelserne, er Indbegrebet af Cirklernes Fællespunkter; men Definitionen siger jo udtrykkeligt, at det geometriske Sted er »den Linie, h-

[1]) 2den Udgave.

alle saadanne Punkter ligge«, der opfylde »visse Betingelser«. Hvilken er da her »den Linie«? Er det den ene Cirkel eller den anden eller Indbegrebet af dem begge eller en vilkaarlig gennem Cirklernes Fællespunkter trukken Linie, der jo ogsaa indeholder begge de Betingelserne opfyldende Punkter?

Man faar altsaa af denne Definition slet ingen eller i alt Fald kun en aldeles forvirret Besked paa, hvad et geometrisk Sted er, og den tør vel derfor kaldes endnu mere falsk end den af D'Hrr. Christensen og Schmidt opstillede, idet denne ved at sige »alle« i Stedet for »ere alle de, der« ikke faar alle de den givne Betingelse opfyldende Punkter med, medens derimod hin ved at sige »alle« i Stedet for »kun alle« faar ind under Begrebet »geometrisk Sted« en Uendelighed af aldeles vilkaarlige Linier, hvis Punkter paa et eller faa nær slet ikke opfylde »visse Betingelser«.

At der saa vel her i Tidsskriftet som i en officiel Skrivelse er anket imod den ene af disse to Definitioner er selvfølgelig i sin Orden, hvad enten man ser paa Sagen fra et videnskabeligt eller pædagogisk Synspunkt; men er det, enten fra begge eller i alt Fald fra et af disse Synspunkter betragtet, ogsaa i sin Orden (jfr. Tidskr. for Matem. 1883 Side 139, L. 1—7 f. o.), at den anden upaaanket har været brugt i Skoler i mere end en Fjerdedel af et Aarhundrede?

Danske Eksamensopgaver.

Almindelig Forberedelseseksamen.

Oktober 1892.

Aritmetik.

1. Hvor længe skal en Kapital staa paa Rente og Rentes Rente (4 pro Cent pro anno), for at den aarlige Rente kan blive lig med den oprindelige Kapital?

2. Find x og y af Ligningerne

$$\log x + 2 \log y = -\log 0{,}024$$
$$3 \log x - 2 \log y = 5 \log 24 - 15.$$

3. Et trecifret Tal er 48 Gange saa stort som sin Tværsum; Antallet af Tiere er lige saa meget større end Antallet af Enere, som det er mindre end Antallet af Hundreder. Find Tallet.

Opløsning. 1. $a \,.\, 1{,}04^n \,.\, 0{,}04 = a$

$$1{,}04^n = 25$$
$$n = \frac{\log 25}{\log 1{,}04} = \frac{1{,}39794}{0{,}01703} = 82{,}09.$$

Svar. Om 82 Aar har Kapitalen naaet en saadan Størrelse, at Renten næste Gang meget nær er lig den oprindelige Kapital.

2. Ved Addition af de givne Ligninger faas

$$4 \log x = 5 \log 24 - 15 - \log \frac{24}{10^3}$$
$$= 4 \log 24 - 12$$
$$\log x = \log 24 - 3; \quad x = 0{,}024$$
$$y = \frac{1}{0{,}024} = \frac{125}{3}.$$

3. Vi kalde Tiercifret x
Hundredcifret $x + y$
Enercifret $x - y$

og faa da ifølge Opgaven

$$100x + 100y + 10x + x - y = 144x$$

hvoraf $x = 3y.$

Cifrene ere da $4y$, $3y$ og $2y$, hvor y enten er lig 1 eller 2.

Tallet er altsaa 432 eller 864.

Geometri.

1. I en given Cirkel skal der indskrives et Kvadrat, hvis ene Side gaar gennem et givet Punkt.

2. I Trekant ABC er AB 4 ", BC 5 " og CA 6 ". BC og dens Forlængelse skæres af de Linier, der halvere $\angle$ A og dens Nabovinkel, i M og N. Hvor lang er MN?

3. Vinklerne i et Rektangel halveres. Bevis, at den Firkant, som begrænses af Halveringslinierne, er et Kvadrat, og find dettes Areal, naar Rektanglets Sider ere a og b.

Ekspl. a = 4,18154 '; b = 1,73205 '.

Opløsning. 1. Det geometriske Sted for Midtpunktet af Firkantsiden er en Cirkel, der let konstrueres. Tangenter fra det givne Punkt til denne Cirkel bestemme det søgte Kvadrat, saa at der bliver 2, 1 eller ingen Løsning, eftersom Punktet ligger udenfor, paa eller indenfor dens Periferi.

2. Man har

$$\frac{BM}{MC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ og } BM + MC = 5'',$$

hvoraf

$$BM = 2''.$$

$$\frac{NB}{NC} = \frac{2}{3} \text{ og } NC - NB = 5'',$$

$$NB = 10''.$$

Altsaa

$$NM = 12''.$$

3. Halveringslinierne være: AEF, BEH, CGH, DGF.

$$\angle AFD = 180^0 - 2 . \frac{90^0}{2} = 90^0 \text{ o. s. v.}$$

$$AF = DF \left(= \frac{a}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\triangle AEB \cong \triangle DGC,$$

hvoraf

$$AE = DG \left(= \frac{b}{\sqrt{2}}\right),$$

altsaa

$$EF = GF = \frac{a - b}{\sqrt{2}}.$$

Firkanten er altsaa et Kvadrat; dets Areal er

$\frac{1}{2}(a - b)^2$, i Eksemplet 3 □ '.

Praktisk Regning.

1. Hvor mange pro Cent Guld, hvor mange pro Cent Kobber er der i en Metalklump, som er dannet ved Sammensmeltning af 2 andre Metalklumper, af hvilke den ene vejede 13 ℔ 47 Kvint og indeholdt $80\frac{1}{2}$ pro Cent Guld, Resten Kobber, medens den anden vejede 5 ℔ 9 Kvint og indeholdt $93\frac{1}{4}$ pro Cent Guld, Resten Kobber?

Opløsning. Da den første Klump indeholder $\frac{13{,}47 \cdot 80{,}5}{100}$ ℔ Guld, den anden $\frac{5{,}09 \cdot 93{,}25}{100}$ ℔ Guld, vil den sammensmeltede Metalklump, der vejer 18,56 ℔, indeholde

$$\frac{13{,}47 \cdot 80{,}5 + 5{,}09 \cdot 93{,}25}{18{,}56} \text{ p. Ct.}$$
$$= \text{ca. } 84 \text{ pro Cent Guld.}$$

2. Beregn, uden at bruge Logaritmer, med 5 paalidelige Decimaler

$$x = \frac{14}{5}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{50}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{1}{50}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{1}{50}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$+ \frac{948}{3125}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{9}{6250}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{9}{6250}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{9}{6250}\right)^3 + \ldots\right].$$

Opløsning. $x = A + B.$

A.

1,00000000
0,01333333
0,00021333
0,00000365
1,0135502(1)
2,8
2,837940(56)

Da Resten af Leddene $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\left(\frac{1}{50}\right)^4 + \ldots$ er mindre end en uendelig Kvotientrække med Kvotienten $\frac{1}{50}$ (Leddene dannes ved Multiplikation med $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{50}$, $\frac{12}{13} \cdot \frac{1}{50}$ o. s. v., a"

$< \frac{1}{50}$), vil den Fejl, der begaas ved at bortkaste denne Rest, være

$$< 0{,}00000365 \cdot \frac{8}{9} \cdot 0{,}02 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{50}}$$

$$< 0{,}0000001,$$

saa at der højst er en Fejl af 1 i syvende Decimal.

B.

$$\begin{array}{r} 1{,}0000000 \\ 0{,}0009600 \\ 0{,}0000011 \\ \hline 1{,}0009611 \\ \cdot\ 0{,}30336 \\ \hline 0{,}3036511(5..) \end{array}$$

idet som ovenfor

$$\text{Fejlen} < 0{,}0000011 \cdot \frac{6}{7} \cdot 0{,}00144 \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{6250}}$$

$$< 0{,}000001.$$

Man faar da

$$x = 3{,}14159.$$

Anm. Da Kendskab til Summation af uendelige Rækker i Almindelighed, ikke tør forudsættes hos Aspiranter til alm. Forberedelseseksamen, og da det naturligvis ikke er Meningen, at Restleddene kritikløst skulle bortkastes, fordi de blive »saa smaa« — hvilket ganske vilde være i Strid med de Fordringer, der med Rette stilles til Stringens, smlgn. f. Eks. Lim $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ — maa det derfor antages, at Tegnene $+ \ldots$, der jo antyde den ubegrænsede Fortsættelse, skyldes en Fejltagelse, og at Meningen blot er den, at de to firleddede Størrelser skulle beregnes med en saadan Nøjagtighed, at der i Udtrykket for x naas 5 paalidelige Decimaler. Naar vi ikke desto mindre ovenfor have løst Opgaven i Overensstemmelse med Teksten, som den nu engang er bleven, er det bl. a. af den Grund, at det sikkert vil kunne interessere adskillige af dem, der ved Eksamen have forsøgt at løse den, at se hvorledes det sker.

P. T. F.

Ekstraordinær Skolelærereksamen.

(Oktober 1892.)

Regneopgave Nr. 1.

(3 Timer.)

A køber Rug og Byg, ialt 916 Tdr. 2 Skpr. $1\frac{3}{5}$ Fdk., til saadanne Priser, at Rugen er $16\frac{2}{3}$ pCt. dyrere pr. Tønde end Bygget. Omkostningerne ved Indladningen ere 647,10 Kr. og i Fragt til England betaler han $6\frac{2}{3}$ pCt. af de før nævnte Udgifter (Indkøbspris med Omkostninger). Undervejs svinde begge Kornsorter $\frac{1}{51}$, hvorefter $\frac{3}{7}$ af Rugen sælges til $17\frac{1}{3}$ sh., Resten til 17 sh. pr. Tønde, og Bygget til en saadan Pris, at han ved Handelen tjener 11,1 pCt. Var alt Kornet solgt til den Pris, han i Gennemsnit fik for Rugen, vilde han have tjent 15,5 pCt., men hvis han for Rugen kun havde faaet samme Pris pr. Tønde som for Bygget, vilde hans Fortjeneste have været 7,8 pCt.

I. Hvor stor var A's Fortjeneste ved Handelen?
II. Hvad fik han i engelske Penge for 1 Td. Byg?
III. Hvor mange Tønder havde han købt af hver Sort?
IV. Hvad var Indkøbsprisen pr. Tønde?

1 Lstl. = 20 sh. = 18 Kr.

Opløsning. Gennemsnitsprisen for en Tønde Rug er $17\frac{1}{7}$ sh.; der er solgt $916{,}3 \cdot \frac{50}{51} = 898\frac{1}{3}$ Tdr. til en Pris af

$$\frac{17\frac{1}{7} \cdot 898\frac{1}{3} \cdot 111{,}1}{115{,}5} = 14813\frac{1}{3} \text{ sh.}$$

Fortjenesten $\frac{14813\frac{1}{3} \cdot 11{,}1}{111{,}1} = 1480$ sh. (I)

Hele Udgiften $13333\frac{1}{3}$ sh. = 12000 Kr.

En Tønde Byg betalt med $\frac{17\frac{1}{7} \cdot 107{,}8}{115{,}5} = 16$ sh. (II)

Der er solgt $\frac{14813\frac{1}{3} - 16 \cdot 898\frac{1}{3}}{17\frac{1}{7} - 16} = 385$ Tdr. Rug og

købt $385 \cdot \frac{51}{50} = 392{,}7$ Tdr. Rug og 523,6 Tdr.

En Tønde Byg er indkøbt for $\dfrac{12000 \cdot \dfrac{100}{106\frac{2}{3}} - 647,10}{392,7 \cdot \dfrac{7}{6} + 523,6}$

$=$ 10,8 Kr. og en Tønde Rug for 12,6 Kr. (IV)

Regneopgave Nr. 2.

(2 Timer.)

Til et Vejanlæg afgive A, B og C tilsammen 22,77 Td. Land og modtage derfor ialt 11,934 Kr.

I. Hvorledes skal denne Erstatning deles imellem dem:

a. Hvis A afgiver 8,25 Tdr. Land, B 6,6 Tdr., C Resten, og 1 Td. Land af A's Jord har 40 pCt. høiere Værdi end 1 Td. af B's, og denne 20 pCt. mindre Værdi end 1 Td. af C's?

b. Hvis A afgiver 2,5 Gange saa megen Jord som B, denne 4,95 Tdr. Land færre end C, og Forholdet mellem Værdierne pr. Tønde Land er som i Tilfælde a?

c. Hvis A afgiver 3,96 Tdr. Land mere end B; denne 1,98 Tdr. mere end C, og Jordernes Godhed staaer i samme Forhold som Antallet af de afgivne Tønder Land?

II. Hvis Værdierne af 1 Tønde Land af A's, B's og C's Jorder forholde sig $=$ 2,4 : 3 : 1,6, og A i Erstatning faaer 2106 Kr. mindre end B og 2808 Kr. mere end C, hvor mange Tønder Land har da hver afgivet?

Opløsning. Til I, a, b og c findes Besvarelsen ved Opgaven Nr. 2 til Skolelærerinde-Eksamen.

II. A faar 6318 Kr., B 4212 Kr. og C 1404 Kr., de afstaaede Tønder Land forholde sig som $\frac{6318}{2,4} : \frac{4212}{3} : \frac{1404}{1,6}$ eller som 15 : 8 : 5, A har saaledes afgivet $22,77 \cdot \frac{15}{28} = 12$ Tdr.

2775 □ Al., B $22,77 \cdot \frac{2}{7}$ = 6 Tdr. 7080 □ Al. og C 4 Tdr. 925 □ Al.

Regneopgave Nr. 3.

(2 Timer.)

En ret Kegles Overflade er 2956,8 □ Fod, dens Sidelinie 23,8 Fod. I Grundfladens Centrum ligger Toppunktet af en Pyramide med kvadratisk Endeflade, der er parallel med Keglens Grundflade, og hvis Vinkelspidser falde i Keglens Overflade. Den Del af Keglen, som ligger mellem Toppunktet og Pyramidens Grundflades Plan, er 80,85 Kubikfod. Der søges:

I. Keglens Indhold.
II. Pyramidens Højde.
III. Pyramidens Indhold.

(π regnes $= \frac{22}{7}$.)

Opløsning. Kaldes Grundfladens Radius r, har man

$$r^2\pi + 23{,}8\,r\pi = 2956{,}8$$

$$r^2 + 23{,}8\,r - 940{,}8 = 0, \quad r = 21 \text{ Fod.}$$

Keglens Højde $\sqrt{23{,}8^2 - 21^2} = 11{,}2$ Fod.

Keglens Indhold $\frac{21^2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 11{,}2}{3} = 5174{,}4$ Kubikf. (I)

Da 80,85 og 5174,4 forholde sig som 1 : 64, bliver Højden og Grundfladens Radius i den afskaarne Keglespids $\frac{11{,}2}{4} = 2{,}8$ og $\frac{21}{4} = 5{,}25$ og Siden i Pyramidens Grundflade $5{,}25\sqrt{2}$; altsaa Pyramidens Højde $11{,}2 - 2{,}8 = 8{,}4$ Fod, dens Indhold $\frac{(5{,}25\sqrt{2})^2\, 8{,}4}{3} = 150{,}35$ Kubikf. (II og III.)

Geometrisk Tegning.

a ———————————————— b

Med en Side = ab tegnes en regelmæssig Tikant og indeni denne 10 Kvadrater, hvert med en af Tikantens Sider t··

Side; disse 10 Kvadraters Diagonaler, omskrevne og indskrevne Cirkler tegnes. Tillige tegnes punkterede: Tikantens omskrevne Cirkel og en dermed koncentrisk Cirkel gjennem en af de andre Vinkelspidser i Kvadraterne.

Tikanten trækkes fuldt op med tyk Linie, Kvadraterne og de ikke punkterede Cirkler trækkes fuldt op, men med tynd Linie, Kvadraternes Diagonaler punkteres.

N. B.

Norske Examensopgaver.

Skolelærerexamen.

(Juni 1892.)

(Meddelte af Lærer Magnus Berg.)

1. En kjøbmand i Kristiania får hjem fra Frankrig 12 fustager rosiner, der hver veier 150 kg. brutto. Tara $5\frac{5}{9}$ %. Indkjøbsprisen er 1,50 francs pr. kg. netto. Omkostninger i Frankrig $13\frac{1}{3}$ % af indkjøbssummen. Fragt 310 francs. Told og oplosning i Kristiania kr. 50,00. Hvad bliver salgsprisen pr. kg. når kjøbmanden vil tjene 10 %?

(1 francs = 72 øre).

Svar: kr. 1,52.

2. I en forretning eier A 35 %, B 40 % og C resten. B skal for sit arbeide i forretningen forlods have 25 % af udbyttet. Ved opgjøret får B ialt udbetalt kr. 3850,00. Hvormeget skal A og C have af udbyttet?

Svar: A kr. 1837,50, C kr. 1312,50.

3. A eier 2 gårde: på den større har han foder for 4 heste og 14 kjør i 222 dage, på den mindre for 2 heste og 11 kjør i 132 dage. Efter 42 dages forløb vil eieren flytte så mange kjør fra den ene gård til den anden, at fodret kan vare lige længe paa begge steder. Når 2 heste regnes lig

5 kjør, — hvormange kjør må da flyttes, og hvorlænge varer fodret endnu?

Svar: Der må flyttes 6 kjør, og fodret varer 144 dage endnu.

4. En grøft, som er 0,9 m. bred oventil, 0,5 m. bred nedentil og 1,1 m. dyb, skal gjøres 1,3 m. bred oventil, 0,54 m. bred nedentil og 1,4 m. dyb. Længden forbliver uforandret 432 m.

a) Hvormange kubikmeter jord må skaffes væk fra grøften?

b) Hvormange kjærrelæs bliver det, når kjærrekassen er 1,5 m. lang, 1 m. bred og 3 dm. dyb, og jorden under arbeidet antaget at tiltage i rumfang med $\frac{1}{3}$?

Svar: a) Der må skaffes $\frac{1}{2}$ (1,3 + 0,54) . 1,4 . 432 — $\frac{1}{2}$(0,9+0,5) . 1,1 . 432 = 223,776 m.^{3} jord væk fra grøften.

b) Antallet af kjærrelæs bliver $\frac{223,76 \cdot 4}{1,5 \cdot 0,3 \cdot 3} = 663,04.$

5. Et cylindrisk kar af jernblik skal rumme 21 liter og dybden skal være 4,2 dm. Hvor stor må bunden gjøres i tvermål, og hvor lang og bred må den plade være, som skal danne karrets sidevæg, når intet hensyn tages til, hvad der vil medgaa til sammenføiningen? (Beregnes med en nøiagtighed af indtil mm.)

Svar: Bundens tvermål $= \sqrt{\frac{21 \cdot 4}{3,14 \cdot 4,2}} = 2,52$ dm.

Bredden paa pladen = karrets høide = 4,2 dm. Længden = 3,14 . 2,52 = 7,92 dm.

Løste Opgaver.

(Opgaverne 126, 128—35, 139—42 ere ogsaa løste af Hr. Herman Olsen.)

68. Find Ligningen for en ligesidet Hyperbel, der gaar igennem Begyndelsespunktet og to andre givne Punkter, saa

at disse blive diametralt modsatte paa Hyperblen. **Hvilken Betingelse maa Afstandene fra Begyndelsespunktet til de to givne Punkter samt Vinklen mellem disse Afstande opfylde for at Begyndelsespunktet kan blive Hyperblens Toppunkt?**

Opløsning. Ligningen for den ligesidede Hyperbel kan være $x^2 - y^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = 0.$

De givne Punkter kunne være $(x_1 y_1)$ og $(x_2 y_2)$. Man har da

$$x_1^2 - y_1^2 + 2Cx_1y_1 + 2Dx_1 + 2Ey_1 = 0.$$

Da Hyp.'s Centrum er $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, har man (Jul. Petersens Anal. Geom. Lign. 103):

$$\frac{x_1+x_2}{2} + C\frac{y_1+y_2}{2} + D = 0$$

$$\text{og} \quad -\frac{y_1+y_2}{2} + C\frac{x_1+x_2}{2} + E = 0.$$

Af disse fire Ligninger skulle nu C, D og E borteliminereres, hvorved Hyp.'s Ligning bliver:

$$\begin{vmatrix} x^2 - y^2 & xy & x & y \\ x_1^2 - y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 \\ 2(x_1+x_2) & y_1+y_2 & 2 & 0 \\ -2(y_1+y_2) & x_1+x_2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

idet Brøkerne ere bortskaffede i de 2 sidste Rækker. Denne Determinant opløses i Underdeterminanterne, hvorved faas:

$$(x^2 - y^2)\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 \\ y_1+y_2 & 2 & 0 \\ x_1+x_2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - xy\begin{vmatrix} x_1^2-y_1^2 & x_1 & y_1 \\ 2(x_1+x_2) & 2 & 0 \\ -2(y_1+y_2) & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+ x\begin{vmatrix} x_1^2-y_1^2 & x_1y_1 & y_1 \\ 2(x_1+x_2) & y_1+y_2 & 0 \\ -2(y_1+y_2) & x_1+x_2 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x_1^2-y_1^2 & x_1y_1 & x_1 \\ 2(x_1+x_2) & y_1+y_2 & 2 \\ -2(y_1+y_2) & x_1+x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Disse 4 Determinanter udregnes og sammentrækkes, hvorved Hyp.'s Ligning bliver:

$$(x_1y_2 + x_2y_1)(x^2 - y^2) + 2(y_1y_2 - x_1x_2)xy$$
$$-(y_2(x_1^2 + y_1^2) + y_1(x_2^2 + y_2^2))x$$
$$+(x_2(x_1^2 + y_1^2) + x_1(x_2^2 + y_2^2))y = 0.$$

Da Hyperblen gaar gennem Begyndelsespunktet, er den

Betingelse tilstrækkelig, at Hyp.'s Akse gaar gennem dette Punkt, for at det kan blive et Toppunkt. Denne Betingelse er opfyldt, naar $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + y_2}$, idet α er Vinklen mellem Hyp.'s Axe og x-Axen; men nu er $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}$ (Jul. Petersens Anal. Geom. Lign. 108). Betingelsen er da:

$$\frac{y_1 y_2 - x_1 x_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} = \frac{2\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}}{1 - \left(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}\right)^2} = \frac{2(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2};$$

sætter man her Yderleddenes Produkt lig Mellemleddenes, multipliceres ud og trækkes sammen, faas:

$$2(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$
$$+ (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)(x_1 x_2 + y_1 y) = 0,$$

eller idet Afstandene fra (0, 0) til de 2 givne Punkter betegnes ved l_1 og l_2:

$$2 l_1^2 l_2^2 + (l_1^2 + l_2^2)(x_1 x_2 + y_1 y_2) = 0.$$

Hvis Vinklen mellem de 2 Afstande er v, har man

$$\operatorname{tg} v = \pm \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}} = \pm \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2},$$

eller $$\operatorname{tg}^2 v = \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2}{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}$$

og $$1 + \operatorname{tg}^2 v = \frac{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2}{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2}$$
$$= \frac{l_1^2 l_2^2}{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2},$$

altsaa $$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \pm \frac{l_1 l_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}} = \pm l_1 l_2 \cos v,$$

altsaa $$2 l_1^2 l_2^2 \pm (l_1^2 + l_2^2) l_1 l_2 \cos v = 0,$$

eller $$2 l_1 l_2 \pm (l_1^2 + l_2^2) \cos v = 0,$$

eller $$\cos v = \pm \frac{2 l_1 l_2}{l_1^2 + l_2^2},$$

der er den søgte Betingelse.

(Herman Olsen.)

Anm. Saafremt l_1 og l_2 ere af samme Tegn, maa v blive stump; ere de af modsat Tegn, maa v blive spids; altsaa er

$$\cos v = -\frac{2 l_1 l_2}{l_1^2 + l_2^2},$$

hvilket let direkte ses ved at sætte

$$x_1 = l_1 \cos v_1$$
$$y_1 = l_1 \sin v_1 \text{ o. s. v.,}$$

som giver

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = l_1 l_2 \cos v.$$

(C. E. V.)

141. Summen af en Trekants Sider er lig Summen af de udvendige Røringscirklers Radier, og Trekantens Areal er n Gange Kvadratet paa Radius til den indskrevne Cirkel. Vis, at Tangenserne af de halve Vinkler i Trekanten ere Rødder i Ligningen

$$x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{n} = 0.$$

For $n = 8$ beregnes Vinklerne.

Opløsning. Man har

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

eller ved Multiplikation med $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1.$$

Endvidere

$$T = nr^2 = rs,$$

eller

$$s = nr,$$

eller

$$\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = n \,.\, a\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

hvoraf

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{n}.$$

$$r_a + r_b + r_c = a\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A} + a\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}$$

$$+ a \frac{\sin C}{\sin A} \; \frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C}$$

$$= a \left(\frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \right)$$

$$= a \left(\frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \right) = 2s$$

$$= 2 . a \frac{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

hvoraf ved Multiplikation med $\frac{\sin \frac{A}{2}}{a}$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B+C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

eller
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 2$$

eller
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 2;$$ [1]

$\operatorname{tg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ ere altsaa Rødder i Ligningen

$$x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{n} = 0.$$

For $n = 8$ faas

$$x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{8} = 0,$$

hvor Roden $\frac{1}{2}$ let ses; divideres med $x - \frac{1}{2}$ faas

$$x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{1}{4} = 0,$$

---

[1]) hvilket simplere sés ved $r_a = s \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ og de analoge.

hvoraf $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$,

altsaa $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{5{,}23607}{4} = 1{,}30902$,

$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{0{,}76303}{4} = 0{,}19076.$

$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9{,}69897$, $\log\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}11695$, $\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9{,}28049$,

hvoraf $\frac{A}{2} = 26^0\,33'\,54''$, $\frac{B}{2} = 52^0\,37'\,23''$, $\frac{C}{2} = 10^0\,48'$,

følgelig $A = 53^0\,7'\,48''$, $B = 105^0\,14'\,46''$, $C = 21^0\,36'$.

(Herman Olsen.)

117. En ligesidet Hyperbel og en Ellipse ere konfokale og have dobbelt Berøring med et variabelt Keglesnit, hvis Røringskorder gaa gennem de givne Kurvers Centrum.

Find Stedet for Skæringspunktet af Tangenterne til Ellipsen og Hyperblen i de Punkter hvor disse Kurver røres af det variable Keglesnit.

Opløsning. Lad Ellipsens Ligning være:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

og Hyperblens $x^2 - y^2 = a_1^2$,

hvor, paa Grund af at de to Keglesnit ere konfokale og Hyperblen ligesidet, $a_1^2 = \frac{e^2a^2}{2}$.

Et Keglesnit, der har dobbelt Berøring med Ellipsen har Ligningen: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 + k(y - \alpha x)^2 = 0$,

idet $y = \alpha x$ er Ligningen for Røringskorden.

Ligningen for et Keglesnit, der har dobbelt Berøring med Hyperblen, er:

$$x^2 - y^2 - a_1^2 + k_1(y - \alpha_1 x)^2 = 0,$$

idet $y = \alpha_1 x$ er Ligningen for Røringskorden.

For at finde Ligningen for et Keglesnit, der har dobbelt Berøring med begge Keglesnittene, opstilles Betingelserne for, at disse to Ligninger skulle være identiske.

Derved faas:

$$\frac{1 + k_1\alpha_1^2}{b^2 + k\alpha^2} = \frac{-1 + k_1}{a^2 + k} = \frac{k_1\alpha_1}{k\alpha} = \frac{a_1^2}{a^2 b^2} = \frac{e^2}{2b^2}.$$

Heraf udledes Ligningerne:

$$2k_1\alpha_1^2 b^2 - k\alpha^2 e^2 + 2b^2 - e^2 b^2 = 0,$$
$$2k_1 b^2 - ke^2 - 2b^2 - e^2 a^2 = 0,$$
$$2k_1\alpha_1 b^2 - k\alpha e^2 = 0.$$

Elimineres k og k_1 af disse Ligninger faas:

$$\begin{vmatrix} 2\alpha_1^2 b^2 & -\alpha^2 e^2 & 2b^2 - e^2 b^2 \\ 2b^2 & -e^2 & -2b^2 - e^2 a^2 \\ 2\alpha_1 b^2 & -\alpha e^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

som kan skrives:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha\alpha_1 & 2b^2 - e^2 b^2 \\ 1 & -1 & -2b^2 - e^2 a^2 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{[1]}$$

hvoraf faas: $$\alpha\alpha_1 = \frac{2b^2 - e^2 b^2}{2b^2 + e^2 a^2} = \frac{b^2}{a^2}. \text{[2]}$$

Kaldes Retningskoefficienterne til Tangenterne i Endepunkterne af Røringskorderne tg p og tg q, haves:

$$\operatorname{tg} p = -\frac{b^2}{a^2\alpha} \text{ og } \operatorname{tg} q = \frac{1}{\alpha_1},$$

hvoraf: $$\operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{tg} q = -1.$$

De to Tangenter staa altsaa vinkelret paa hinanden. Deres Ligninger ere:

$$x\cos v + y\sin v = \pm\sqrt{a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v}$$
$$-x\sin v + y\cos v = \pm\sqrt{a_1^2\sin^2 v - a_1^2\cos^2 v};$$

kvadreres og adderes disse Ligninger faas:

$$x^2 + y^2 = (a^2 - a_1^2)\cos^2 v + (b^2 + a_1^2)\sin^2 v,$$

som skrives:

$$2(x^2 + y^2) = (2a^2 - e^2 a^2)\cos^2 v + (2b^2 + e^2 a^2)\sin^2 v$$
$$= a^2(2 - e^2)\cos^2 v + a^2(2 - e^2)\sin^2 v.$$

---

[1]) Herved er indført den fremmede Rod $\alpha_1 = 0$ og bortkastet Løsningen $\alpha_1 = \alpha$, som medfører, at k og k_1 blive uendelige; det tilsvarende dobbeltrørende Keglesnit reducerer sig da til en Dobbeltlinie: $y = \alpha x$.

[2]) stemmende med, at de to Røringskorder skulle skille to modstaaende Skæringskorder harmonisk. Red.

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}(2 - e^2) = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

der er Ligningen for det geometriske Sted, som altsaa er en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

(E. Schou.)

Opgaver til Løsning.

147. Bevis, at Tangenten til et Keglesnit er Median i den Trekant, der dannes af Linierne fra Tangentens Røringspunkt til den store (første) Akses Endepunkter og Tangenten til et af disse Punkter. (Åsted.)

148. To Tangenter til en Ellipse have Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} 4x + 5y &= 25 \\ 9x + 20y &= 75 \end{aligned}\right\}$$

Bestem Ellipsen, hvis Akser falde sammen med Koordinatakserne. (Åsted.)

149. En Mand er Fader til 7 Sønner, som alle leve; de følge efter hinanden med en konstant Aldersforskjel af 3 Aar. Summen af Sønnernes Alder er nu lig det dobbelte af Faderens Alder, men for 9 Aar siden var Faderens Alder netop lig Summen af hans Sønners Aldere. Hvor gammel er nu Faderen og hver af hans Sønner? (J. P. Gram.)

150. Bevis Sætningen: I en vilkaarlig Trekant skære følgende Linjer hverandre i samme Punkt, nemlig Medianen fra Vinkelspidsen A, A's Polar m. H. t. Trekantens indskrevne Cirkel og en Linje gennem denne Cirkels Centrum vinkelret paa Siden a. (Adam Rump.)

Litteratur Anmeldelse.

Opgaver i rén Mathematik til Brug ved Afslutningen af det elementære Kursus og til Selvstudium, af cand. mag. Niels Nielsen.

Medens det er nogenlunde let at skaffe sig endog temmelig forskjelligartede Opgaver i Fag som f. Ex. Trigonometri eller Stereometri, er det vanskeligere for en Lærer, der støtter sig til og skal støtte sig til de danske Lærebøger, at faa udarbejdet et System af algebraiske Opgaver, der svarer netop til disse; den danske Litteratur frembyder kun lidt derom, og de udenlandske Samlinger kunne kun benyttes med Forsigtighed. Det vil derfor vinde Bifald, at en yngre Mathematiker har brudt Isen ved at udgive den ovennævnte Samling, der i visse Retninger afhjælper Savnet.

Bogen henvender sig til Skolens øverste Klasser og, ikke mindst, til yngre Mathematikstuderende og ældre og yngre Lærere. En Del af Opgaverne ere nemlig — ogsaa efter Forfatterens Mening — temmelig svære til direkte Skolebrug.

Samlingens Karakter antydes allerede derved, at baade den første og tillige en af de allersidste Opgaver (Nr. 1 og Nr. 333) gaa ud paa at bevise, at $\lim \left(\frac{a}{b}\right)^n = \infty$, naar $\frac{a}{b} > 1$ og $\lim n = \infty$. Det er nemlig Forfatterens Mening overalt at forlange strengt exakte Løsninger; nogle Undtagelser hvor dette ikke synes fastholdt, skulle nævnes siden. De givne Antydninger til Løsning af Opgaverne — der forøvrigt uden Skade kunde forøges en Del — ere gjennemgaaende gode, ogsaa stundom de nye Beviser, f. Ex. det korte Bevis for Binomialformlen, noget som forøvrigt ogsaa Anmelderen stadig har benyttet.

Som en Undtagelse kan nævnes det en hel Side fyldende Bevis for Nr. 234, der bør ombyttes med en Henvisning til Nr. 230. Resultatet i Nr. 13 er urigtigt, ligesaa Uligheden i 313 og selve Sætningen i Nr. 149; at saadant kan indsnige

sig ved et forholdsvis saa stort Antal Opgaver er dog let undskyldeligt, selv om Listen vel nok kan forøges en Del.

Bogen indeholder mange fortræffelige Opgaver, og ikke faa af disse ere særdeles brugelige ogsaa i Skolen; dette gjælder selv Opgaverne i et lille Afsnit med en saa farlig Overskrift som »Determinanter og Kædebrøker«. I det Hele har Forfatteren med Held hentet flere af sine Opgaver fra højere Dele af Mathematiken. Adskillige af dem ere dog originale, selv om det ubetinget ikke er den langt overvejende Del som Forfatteren antyder.

Samlingen præsenteres i Begyndelsen af Forordet som et Biresultat af andre mathematiske Undersøgelser som »Udklip af Dagbøger«. Den havde imidlertid ikke behøvet denne Selvkarakterisering.

Dens hele abstrakte Karakter viser snart, at det forholder sig saaledes. Det maa nemlig fremhæves som en gjennemgribende Mangel ved Bogen som Skolebog, at den fuldstændig mangler alle Anvendelser. Herved mener jeg for det første, at noget saadant som Ligninger i Ord slet ikke findes, hvad der i hvert Fald nødvendiggjør en flittig Brug af andre Opgavesamlinger ved Siden af denne. Men en endnu større Mangel er det, at der ikke i hele Samlingen findes forlangt en eneste Løsning med Discussion; de herved nødvendige Tankebevægelser vil jeg for mit Vedkommende ansé det for en stor Feil ikke at indøve. Da en almindelig Løsning i de fleste Tilfælde kun bliver brugelig i Praxis ved en Discussion, staa de to Hovedmangler i den nøjeste Forbindelse med hinanden og med Opgavernes abstrakte Karakter. Det sidste er ingenlunde det samme som, at Opgaverne ere for svære; særlig svære Opgaver kunde jo desuden forbigaas, men selv om alle medtages, faar man efter min Mening gjennem dem kun en altfor énsidig Uddannelse.

De her fremhævede Anker ere paa ingen Maade af den Art, at de gjøre Bogen ubrugelig i Skolen. I den Henseende frygter jeg mere for, at dens mildest talt lidet soig-

nerede Sprog vil være en Hindring; en Beskrivelse af Induktionsbeviset saaledes som den findes Side 4 er f. Ex. aldeles uklar.

En Anmeldalse af denne Bog kan imidlertid ikke holde sig til Opgaverne alene; den er i Forord og Noter forsynet med Betragtninger, som ville fange endog den mest overfladiske Læser. Jeg vil ikke lægge Skjul paa, at en stor Del af dette maa opfattes som uheldig, saavel i sine Resultater som i formel Henseende.

Lad os først sé paa de pædagogiske Paastande, som tage deres Begyndelse med den Sætning, at man bør lære Eleverne elegante Løsninger. Hermed er der fremsat et Program, som maaske nok lader sig forsvare eller som det i hvert Fald utvivlsomt kunde være Umagen værd at diskutere. Man maatte da ud fra dette Synspunkt give et mindre Antal af Opgaver men til Gengæld forlange Løsninger, der saa nær som mulig sluttede sig netop til hver enkelt Opgaves Karakter, saaledes at særlig lettende Omstændigheder bleve fuldt udnyttede — i hvert Fald er det noget saadant, man ellers overalt i Mathematiken forstaar ved Elegance. Dette stemmer nu paa ingen Maade med, at der overhovedet vel næppe findes nogen Opgavesamling, der gjør en saa udstrakt Brug af Induktionsbeviset som den foreliggende. Forfatteren har selv en Følelse af det mangelfulde derved, men selv om jeg for mit Vedkommende ikke heri sér nogen Hovedanke med Bogen, viser dette Forhold dog ikke desto mindre, at visse Hensyn af og til tvinge til at slaa af paa Elegancen.

Det er imidlertid ikke værd at gaa nøjere ind paa dette Thema, thi nederst Side VI overraskes man ved den nye Definition paa Elegance, at den kun er det Mathematiken bør være! For saa vidt nu dette overhovedet skal have noget Indhold, maa Forfatteren vel mene hermed kort at have udtrykt det, der er sagt forinden, nemlig at mathematiske Beviser skulle være uangribelige i deres Stringenz og endvidere saa simple og elementære som mulig. Da den sidste Tilføjelse viser,

at Forfatteren selv har Øje for Bestemmelsernes Relativitet, er der jo ikke noget videre at sige dertil; dog mener jeg for mit Vedkommende, at den uangribelige Stringenz paa de forøvrigt faa Steder, hvor der er virkelige Vanskeligheder (Existensbeviserne ved irrationale og conplexe Tal) bedre henlægges til et senere Standpunkt end just Skoleundervisningens. Om man lige overfor vitterlig daarligt begavede Elever ikke vilde staa sig ved i langt højere Grad at slaa af paa Stringensen, er atter et andet Spørgsmaal, som jeg ikke skal ind paa, men dog bemærke, at Sagen paa ingen Maade kan være afgjort med Forfatterens stærke Udtalelser derom. Mærkelig nok synes Forfatteren, der paa saa mange Steder viser sit fuldstændige Kendskab til exakte Metoder, dog ligeoverfor enkelte Opgaver at vakle i den Henseende. Anvisningerne til Løsningen af Opgaverne 180—182 samt 315—317 ere alt andet end gode, hvad Exakthed angaar. Naturligvis kan Forfatteren her undskylde sig med, at han forudsætter en Lærer, der kan afhjælpe Manglerne, men i saa Fald ere Oplysningerne yderst uheldige, da de vel hjælpe ud over det, der er forholdsvis let, men ikke med et Ord omtale det, der er forholdsvis svært.

Højst uheldig er det, at Forfatteren benytter sit Forord til heftige Angreb paa de Lærere, der ikke dele hans Meninger. Disse faar saa trøste sig med, at samtlige Elever med Undtagelse af »en lidt talrig Gruppe« heller ikke faar nogen bedre Behandling, saa at der i det Hele taget er ringe Sandsynlighed for at slippe fra det. At det særlig skal gaa ud over danske Fysikere er utilbørlig, men viser jo rigtignok ikke andet end at Forfatteren paa visse Omraader ikke forstaar at skjelne væsentligt fra uvæsentligt.

Der maa endnu tilføjes nogle Bemærkninger om de historiske Oplysninger. Naturligvis kan det altid være godt at give sine Elever en Smule historisk Kundskab; men for at have nogen virkelig Værdi, maa denne dog væsentlig dreje sig om Ting, som Eleverne ogsaa kjende til ad anden Vej; i hvert Fald maa Oplysningerne være saa paalidelige, som

Nutidens Standpunkt tillader det. Et Monstrum som den Paastand, at vore sædvanlige ubestemte Ligninger allerede findes hos Diofant er i hvert Fald utilladelig; og stemmer aldeles ikke med Forf.'s Yttring om kun at have medtaget, hvad han selv har sét.

Naturligvis kunne Noterne paa sine Steder give ret gode Holdepunkter for en Lærers Fremstillig af Udviklingen, men Oplysningerne tyde rigtignok alt for meget paa et spredt Studium fra Forf.'s Side (skulde f. Ex. Khowarezmi indtage en saa fremskudt Plads, som Forf. anviser ham?), og de almindelige Betragtninger ere løse. Hvad skal man f. Ex. sige om en Paastand som den, at en Hovedgrund til den græske Mathematiks Undergang var det græske Aandslivs Ensidighed i al Almindelighed.

Et typisk Exempel paa Bogens gode og daarlige Sider har man i de sidste Opgaver 342—344 efter Viète, der virkelig ere fortræffelig valgte, men belemrede ved Udfald, der forsaavidt skyde uden om Maalet, som Viète selv, om ved Fejlskrivning eller Fejlregning, har de urigtige Udtryk — hvilket Forf. ikke har bemærket!

Denne Anmeldelse kan ikke slutte uden med en Beklagelse af, at en i flere Henseender saa brugbar Opgavesamling er bleven overlæsset med en saadan Mængde af uvedkommende Ting, at mangen en Lærer maaske allerede af den Grund vil betænke sig paa at give sine Elever den i Hænde. Forf. har i Sandhed ikke gjort sig selv en Tjeneste ved dette, og i en eventuel ny Udgave vilde han staa sig ved at udelade meget og omarbejde Resten af Noterne. (C. Juel.)

Svenske Examensopgaver.

Mogenhetsexamen.

(Höstterminen 1892.)

Algebraiska uppgifter.

1) Huru stor är sidan i en regulier åttahörning, hvars area är lika stor med summan af två dylika figurers areor, hvilkas sidor äro 5,33 cm. och 3,82 m.?

Opløsning. Af Ligningen $x^2 = (5{,}33)^2 + 382^2$
faas $x = 382{,}037$,
saa at den søgte Side er 382,037 Cm.

2. En solid figur (regulier tetraeder) är begränsad af 4 lika stora liksidiga trianglar. Hvilken är dess volym, då hvarje sida är 1 m.?

Opløsning. Grundfladen er $\frac{\sqrt{3}}{4}$ krm., Højden $\sqrt{\frac{2}{3}}$ m.,

$$\text{Volumen} = \frac{\sqrt{2}}{12} \text{ kubm.}$$

3. x, y, z, t bilda geometrisk progression; $x+y$, $2(y+z)$, $z+t$, aritmetisk. Huru stor är den förra progressionens kvot?

Opløsning. $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{t}{z} = q.$

$$2(y+z) - (x+y) = (z+t) - 2(y+z),$$

der ændres til $3y + 3z = x + t.$

Indsættes heri $y = qx,\ z = q^2x,\ t = q^3x\ (x \gtrless 0)$
faas $3q(1+q) = 1 + q^3,$

$$q = -1 \text{ eller } q = 2 \pm \sqrt{3}.$$

4. Huru stora äro vinklarne i en triangel ABC, om sidorna AB, AC och BC samt den från C mot AB fällda perpendikeln bilda en geometrisk progression?

Opløsning. $AB = 1$, $AC = q$, $BC = q^2$, Højden $= q^3$.

Arealet $= \frac{1}{2} q^3 . \sin C = \frac{1}{2} 1 . q^3$,
hvoraf $\sin C = 1,\ C = 90^0.$

Derefter er $q^2 + q^4 = 1,$
hvoraf $q^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sin A.$

5. Ett kärl kan fyllas med vatten medels två rör. Först får det ena stå öppet $\frac{3}{5}$ af den tid som det andra behöfver för att ensamt fylla kärlet; derefter tillstänges det förra och det andra får stå öppet tills kärlet är fullt. På detta sätt åtgår emellertid dubbelt så lång tid till kärlets fyllande, som

när båda samtidigt hållas öppna. Hvad är förhållandet mellan de båda vattenmängder, som båda rören under en minut lemna?

Opløsning. Er den Tid, første Rør bruger til at fylde Karret, x Minutter, og Tiden for det andet Rørs Vedkommende y Minutter, haves if. Opgaven

$$\frac{3}{5}y + \frac{x - \frac{3}{5}y}{x} \cdot y = 2 \cdot \frac{xy}{x+y}.$$

Det søgte Forhold $f = \frac{y}{x}$ bestemmes da af Ligningen

$$f^2 - \frac{5}{3}f + \frac{2}{3} = 0,$$

hvoraf

$$f = \begin{cases} 1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}.$$

6. Om månens radie synes under en vinkel af 15′ 33,5″, huru stor del upptar då månens yta af hela himlasferens yta?

Opløsning. $f = \frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} = \frac{1 - \cos 15' 33{,}5''}{2}$

$$= \sin^2 7' 46{,}75''$$

$$= \frac{1}{195291}.$$

7. Om det hela talet $(a + 10b + 100c + 1000d + \ldots)$ är multipel af 41, så skal talet $(b - 4a + 10c + 100d \ldots)$ äfven vara det.

Opløsning. $a + 10b + 10r = 41p$ (1)

$b - 4a + r = T.$ (2)

Multipliceres (1) med 4 og adderes til (2) faas

$$41b + 41r = 4 \cdot 41p + T,$$

hvoraf $T = 41(b + 1 - 4p)$ hv. sk. bev.

Geometriska uppgifter.

1. En punkt A är gifven inuti en cirkel. Att genom denne punkt draga en korda XY så, att skilnaden mellan dess delar AX och AY blir lika med en gifven rät linie.

Opløsning. Midtpunktet M af Korden bestemmes som Skæringspunkt mellem en Cirkel over AO (O Cirklens Centrum) som Diameter og en Cirkel med A til Centrum, den halve Differens til Radius.

2. En cirkel har sin medelpunkt i en parabels vertex O, och den gemensamma kordan för båda kurvorna delar afståndet mellan O och brännpunkten F midt i tu. Hvad är förhållandet mellan cirkelns diameter och längden af OF?

Opløsning. Af Parablens Ligning $y^2 = 4ax\,(OF = a)$ og Cirklens Ligning $x^2 + y^2 = r^2$ findes

$$x = -2a + \sqrt{4a^2 + r^2} = \frac{a}{2},$$

$$r = \frac{3a}{2}.$$

3. Att konstruera en triangel, då man känner en sida, den deremot stående vinkeln samt rektangeln, som bildas af de öfriga sidorna.

Opløsning. De to sidste af de opgivne Størrelser bestemme Arealet, som derefter sammen med den opgivue Side bestemmer den tilsvarende Højde, og Opgaven er da reduceret til en almindelig bekendt.

4. Ekvationen $2x^2 - xy - 3y^2 + 10x - 5y + 12 = 0$ representerar 2 räta linier, huru stor är vinkeln mellan dem?

Opløsning. De to rette Linier have hver for sig Ligningarne

$$2x = 3y - 4$$

og

$$x = -y - 3.$$

Den søgte Vinkel u er bestemt ved

$$\operatorname{tg} u = \frac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3}} = 5,$$

hvoraf

$$u = 78^0\,41{,}4'.$$

5. ABC är en vid A rätvinklig triangel; på en hvar af sidorna AB, BC og CA är tagen en punkt L, M, N så, att

AL = 2 LB, BM = 2 LC, CN = 2 NA. Om vinkeln LMN är rät så förhåller sig AC till AB liksom sidan till diagonalen i en kvadrat.

Opløsning. Skærer Forlængelsen af LM Forlængelsen af AC i P, er $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$,

hvoraf $\frac{CP}{AP} = \frac{1}{4}$, altsaa $CP = \frac{b}{3}$.

Fældes den vinkelrette MH paa AC, er

$$\frac{HM}{AB} = \frac{1}{3}, \quad HM = \frac{c}{3}$$

og

$$\frac{CH}{CA} = \frac{1}{3}, \quad CH = \frac{b}{3}.$$

Endelig er $(HM)^2 = NH \,.\, HP$ eller

$$c^2 = 2b^2, \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ hv. sk. bev.

6. På radien OA till cirkeln med medelpunkten O är tagen en punkt B och på radiens förlängning en annan, C. OA är medelproportional mellan OB och OC. Om P är en godtycklig punkt på pereferin, så skär PA vinkeln BPC midt i tu.

Opløsning. Det andet Endepunkt af Diameteren gennem A kaldes A_1. Punkterne A_1, A, B og C ligge da harmonisk, og $\angle A_1PA = 90^0$, derfor halvere PA og PA_1 Vinklen BPC og dens Nabovinkel.

7. Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner hypotenusan och skilnaden mellan de liniers längder, hvilka sammanbinda hypotenusans ändpunkter med den inskrifna cirkelns medelpunkt.

Opløsning. Trekanten kaldes ABC, $\angle C = 90^0$, Centrum O. Vinkel AOB = 135^0; afsættes OA udad OB til P, bliver $\angle$ APB bekendt; Konstruktionen udføres derved let.

Fysiska uppgifter.

1. En segelbåt framdrifves i nordvestlig riktning af en vind, som blåser från ost sydost, med en hastighet af 5,5 m. Då båtens hastighet är 1,4 m. träffas seglet, tänkt som ett genom den lodräta masten gående plan, i vinkelrät riktning af vinden. Angif seglets ställning i förhållande til båten.

2. I ett 215 m. långt vågrätt rör, hvars genomskärnings area är 3,5 kvdm., är en lufttätt slutande 14,4 kg. tung kolf rörlig utan nämvärd friktion. Kolfven kommer i rörelse i följd deraf att lufttrycket, som på den ena sidan om kolfven är en atmosfer, på den andra sidan är blott 0,7 atmosferer. Huru lång tid behöfver kolfven att utan begynnelsehastighet genomlöpa hela röret, om de nämda trycken under hela rörelsen hållas lika? Trycket af en atmosfer på 1 kvdm. är $103\frac{1}{3}$ kg. Accelerationen för fritt fall är 9,8.

Opløsning. Den bevægende Kraft er $3{,}5 \,.\, 0{,}3 \,.\, 103\frac{1}{3}$ kg.; divideres denne med Massen af det bevægede Legeme $\frac{14{,}4}{9{,}8}$, faas Accelerationen lig $\frac{3{,}5 \,.\, 0{,}3 \,.\, 103\frac{1}{3} \,.\, 9{,}8}{14{,}4}$,

og altsaa: $$215 = \frac{3{,}5 \,.\, 0{,}3 \,.\, 103\frac{1}{3} \,.\, 9{,}8}{2 \,.\, 14{,}4} \,.\, t^2,$$

hvoraf $$t = 2{,}413 \text{ Sek.}$$

3. Hos ett cylindriskt kärl af ett ämne tyngre än vatten är den yttre diametern 14 cm. och väggens tjocklek 6 mm. Kärlet simmar i vatten med öppningen rätt uppåt. I början är det tomt, och då ligger öppningen 5,5 cm. öfver vattenytan. Vatten insipprar emellertid i kärlet genom ett fint hål, och kärlet sjunker småningom. Hur högt står vattnet ini kärlet, då öppningen just når vattenytan?

Opløsning. Naar Karret synker til Randen fortrænger det yderligere en Vandmængde med Rumfanget $5{,}5 \,.\, \pi \,.\, 7^2$.

Et lige saa stort Rumfang Vand maa være løbet ind i Karret. Kaldes den søgte Højde x, maa man altsaa have $x \cdot \pi \cdot 6{,}4^2 = 5{,}5 \cdot \pi \cdot 7^2$, hvoraf $x = 6{,}58$ ctm.

4. En luftmängd om 2,6 liters rymd har en temperatur af 12^0 och dess tryck uppmätt i kvicksilfverpelare är 33 cm. Hos en annan luftmängd är rymden 1,8 liter, temperaturen 87^0 och trycket 69 cm. Hvilken af dessa luftmängder har den största vigten? Luftens utvidgningskoefficient är $\frac{1}{273}$.

Opløsning. Kaldes Vægten af en Liter af Luften ved 0^0 og 76 ctm.'s Tryk for a, bliver Vægten af de to Mængder henholdsvis

$$2{,}6 \cdot a \cdot \frac{33}{76} \cdot \frac{1}{1 + \frac{12}{273}} = 2{,}6 \cdot a \cdot \frac{33}{76} \cdot \frac{273}{285}$$

og

$$1{,}8 \cdot a \cdot \frac{69}{76} \cdot \frac{1}{1 + \frac{87}{273}} = 1{,}8 \cdot a \cdot \frac{69}{76} \cdot \frac{273}{360}.$$

Hvilken Vægt der er den største, vil da bero paa, hvorvidt

$$\frac{2{,}6 \cdot 33}{285} \gtrless \frac{1{,}8 \cdot 69}{360}.$$

Den sidste Størrelse er den største.

5. På 7,2 dm. afstånd från en samlingslins af glas befinner sig ett litet föremål, som utsänder hvitt ljus. På andra sidan om linsen och på 14,4 dm. afstånd från linsen, sammanbrytas de från föremålet utgående röda strålarna till en verklig bild. Beräkna hvar den violetta bilden af föremålet uppkommer. Brytningsexponenten för det röda ljuset är 1,6 och för det violetta 1,64.

Opløsning. Man har med bekjendte Betegnelser:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Altsaa er

$$\frac{1}{7{,}2} + \frac{1}{14{,}4} = 0{,}6\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

hvoraf:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{14{,}4 \cdot 0{,}2}.$$

For de violette Straaler har man nu:

$$\frac{1}{7,2} + \frac{1}{f} = 0,64\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{0,64}{14,4 \cdot 0,2} = \frac{1,6}{7,2}$$

hvoraf $f = 12$ dcm.

6. En galvanisk ström har på 7 timmar fullständigt sönderdelat 36 gr. kopparklorid och dervid afskiljt 17 gr. koppar. En annan ström, hvars styrka förhåller sig till den förras som 4 till 3 utfäller 75,2 gr. tenn på $12\frac{1}{2}$ timmar ur en lösning, som innehåller en förening mellan tenn och klor. Angif hvilken denna tennförening är, då tennets atomvigt är 118 och klorens 35,5.

Opløsning. Den først nævnte Strøm vilde i 7 Timer have udskilt en Mængde Tin med Vægten $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12,5} \cdot 75,2$ gr. og i samme Tid en Klormængde paa 19 gr. Forholdet mellem Vægtene af Forbindelsens Tin og Klor er altsaa $\frac{3 \cdot 7 \cdot 75,2}{4 \cdot 12,5 \cdot 19} = 1,66$. Da nu i Tinklorure ($SnCl_2$) det samme Forhold bliver $\frac{118}{71} = 1,66$, maa Forbindelsen være Tinklorure.

7. Två ledningstrådars elektriske motstånd m_1 och m_2 äro kända. Polerna af en galvanisk stapel förenas ena gången med den ena tråden, andra gången med den andra. Dervid visar sig att värmeutvecklingen i båda fallen blir densamma. Beräkna motståndet inom stapeln.

Opløsning. Kaldes den søgte Modstand x, har man if. Joules og Ohms Love:

$$0,24 \cdot i^2 \cdot m_1 = 0,24 \cdot i_1^2 \cdot m_2$$

eller

$$\frac{E^2}{(x + m_1)^2} \cdot m_1 = \frac{E^2}{(x + m_2)^2} \cdot m_2,$$

hvoraf

$$x = \sqrt{m_1 m_2}.$$

Løste Opgaver.

(Paa Opgaverne 117 og 141 er der foruden de tidligere optagne indsendt Løsninger af P. H.; paa Nr. 126, 128 og 131 af H. S. Nielsen.)

---

118. Der er givet 2 faste Punkter A og B i en Parabel. En Cirkel gaar gennem A og B, og skærer Parablen i to andre Punkter C og D.

Find Stedet for Skæringspunktet mellem Linierne AC og BD, eller AD og BC.

Opløsning. Af Ligningen til Bestemmelse af Skæringspunkterne mellem Parablen og Cirklen sees det, at Summen af disses Ordinater er o.

Forbindelseslinjerne mellem A (x_1, y_1) og C (ξ_1, η_1) har Ligningen

$$y - y_1 = \frac{y_1 - \eta_1}{x_1 - \xi_1}(x - x_1),$$

som omformes til: $\dfrac{x - x_1}{y - y_1} = \dfrac{y_1 + \eta_1}{p}.$

Paa samme Maade faas for Forbindelseslinjen mellem B (x_2, y_2) og D (ξ_2, η_2):

$$\frac{x - x_2}{y - y_1} = \frac{y_2 + \eta_2}{p}.$$

En Addition af de to Ligninger giver:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} + \frac{x - x_2}{y - y_2} = 0.$$

Flyttes dernæst Begyndelsespunktet til Midtpunktet af AB, faar Ligningen Formen

$$xy = \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{4},$$

svarende til en ligesidet Hyperbel med de nye Koordinatakser som Asymptoter. (P. H.)

124. a, b og c ere Sider i en Trekant, x, y og z ere tre Tal, hvis Sum $x + y + z$ er positiv. Bevis, at Produktet $x \, . \, y \, . \, z$ er negativt, dersom

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0.$$

Opløsning. Mindst een af de 3 Størrelser x, y og z maa være negativ, da

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0$$

og a^2, b^2 og c^2 ere positive.

Antages $z < 0$, er $z > -(x + y)$ og $x + y > 0$, fordi $x + y + z$ er positiv.

Den opgivne Ligning forandres derved til

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{c^2}{x+y} > 0$$

$$\frac{(ay + bx)^2}{xy\,(x + y)} + \frac{(a - b)^2 - c^2}{x + y} > 0.$$

Da det sidste Forhold er negativt ($c > a - b$ og $x + y > 0$) bliver det første positivt, altsaa xy positiv og deraf

$$xyz < 0.$$ (P. H.)

143. En Hyperbel og en Ellipse have de samme Brændpunkter. Man skal søge det geometriske Sted for Kurvernes Skæringspunkter, idet deres Ekscentriciteter have reciproke Værdier, 1) naar Hyperblens første Akse er given $= 2a$, 2) naar Ellipsens Storakse er given $= 2a$.

Opløsning. Betegnes Ellipsens største Akse med $2a$, Ekscentriciteten med e og Hyperblens første Akse med $2a_1$,

bliver $$e^2 = \frac{a_1}{a},$$

og de to Kurvers Ligninger kunne skrives

$$y^2 = \left(1 - \frac{a_1}{a}\right)(a^2 - x^2)$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{a}{a_1}\right)(a^2 - x^2).$$

Ved Addition faas

$$x^2 = aa_1$$

og deraf $$y^2 = (a - a_1)^2.$$

Bortelimineres a_1 af disse Ligninger, fremkommer Ligningen for det søgte geometriske Sted

$$x^2 = a^2 \pm ay.$$

Vælges Pnnktet $(0, \mp a)$ til Begyndelsespunkt, omformes Ligningen til

$$x^2 = \pm ay.$$

Det geometriske Sted bliver altsaa 2 Parabler med Toppunkterne i $(0, \pm a)$, symmetrisk beliggende med Hensyn til x-Aksen og med Brændpunkterne i y-Aksen.

Samme Resultat faas, om man med a_1 forstaar Ellipsens Halvakse og med a Hyperblens.

(P. H.)

(Ogsaa løst af H. S. Nielsen.)

146. ABC er en ligebenet Trekant. AB = BC = 20', AC = 24'. AD er en Diameter i Trekantens omskrevne Cirkel. Bestem de indskrevne Cirklers Radier i Trekanterne ABC, ABD, ACD og BCD.

Opløsning. Fladeindholdet af $\triangle$ ABC = 192.

$$r = \frac{192}{32} = 6.$$

$$AD = \frac{20^2 . 12}{192} = 25; \quad BD = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15; \quad CD = 7.$$

De tre andre Radier findes da let at være henholdsvis 5, 3 og 2.

(Magnus Berg.)

(Ogsaa løst af H. S. Nielsen og H. Olsen.)

Opgaver til Løsning.

151. Konstruer en Trekant ABC, naar man kender Punktet A og Siden BC's Røringspunkter med de to af Trekantens Røringscirkler, der ligge i $\angle$ A (eller med de to andre).

(T. Bonnesen.)

152. Find Værdien af det uendelige Produkt

$$\frac{a+1}{a} \cdot \frac{a^2+1}{a^2} \cdot \frac{a^4+1}{a^4} \cdots\cdots \frac{a^{2^n}+1}{a^{2^n}} \cdots (a > 1).$$

(Ludv. Petersen.)

153. Søg Grænseværdien af Brøken $\frac{a - \sqrt[3]{a^3 + x}}{x}$ for $x = 0$.

154. Søg Summen af Rækken

$$u_1 + u_2 + \ldots u_{2n-1},$$

hvor $u_p = x^p + x^{p-1}y + \ldots + xy^{p-1} (p \leqq n)$

$$u_{n+p} = x^n y^p + \ldots + x^{p+1} y^{n-1}.$$

155. Søg Summen af Rækken

$$2x + 6x^2 + 12x^3 + \ldots + p(p+1)x^p + \ldots + n(n+1)x^n$$
$$+ n(n+1)x^{n+1} + (n-1)(n+2)x^{n+2} +$$
$$\ldots + (n-p+1)(n+p)x^{n+p} + \ldots + 2nx^n.$$

(153—55 af P. T. F.)

Tilføjelser og Rettelser.

Opg. 136 kan løses uden Beregning, idet man først bestemmer et Punkt O, der m. H. t. Cirklen opfylder de stillede Betingelser, og derefter drejer dette Punkt hen paa Kurven. O findes, idet man indfører den givne Sum og drejer om Halveringslinien af Vinklen mellem Sekanterne.

Opg. 137 kan ligeledes løses uden Beregning, idet man benytter sig af den Sætning, at det nederste Stykke af Højden er lig det Stykke af sammes Forlængelse, der ligger mellem Siden og den omskrevne Cirkel; samt deraf at Vinklen mellem denne Cirkels Diameter og Højden er lig B — C.

Side 142 Linie 3 f. o. skal staa $tg \frac{C}{2} = \frac{0{,}76393}{4} = 0{,}19098$, derefter $\frac{C}{2} = 10^0\, 48'\, 44''$; $C = 21^0\, 37'\, 28''$.

Nyt

Tidsskrift for Mathematik.

Redigeret

af

cand. mag. **P. T. Foldberg** og dr. phil. **C. Juel.**

Afdeling B.

Tredie Aargang.

Kjøbenhavn.

Ludvig Jørgensens Bogtrykkeri. Amagertorv 10.

1892.

THE N[illegible]
PUBLI[illegible]
[illegible]
ASTOR, L[illegible]
TILDEN F[illegible]
1897

THE ASTOR LIBRARY.

Indhold.

Side

J. B. Bruun, Cand. polyt., Maskininspektør ved Statsbanerne.
Approximativ Beregning af de reelle Rødder i den logarithmiske Ligning af 1ste Grad 1

J. P. Gram, Dr. phil., Direktør for Ulykkesforsikringsselskabet Skjold.
Om den ubestemte Ligning af 1ste Grad 57, 73

Alf Guldberg, Cand. real.
Om Singulariteter og deres Bestemmelse ved Differentialligninger af 1ste Orden 86

P. Heegaard, stud. mag.
(Sé Løste Opgaver og Opgaver til Løsning.)

J. L. W. V. Jensen, Ingeniør.
(Sé Opgaver til Løsning.)

C. Juel, Dr. phil.
Studie over en Transformation af Laguerre 10
(Sé desuden Anmeldelser, Opgaver til Løsning og Løste Opgaver.

H. Valentiner, Dr. phil., Lærer ved Officérsskolen.
Om Konstruktionen af Kurver af 3die og 4de Orden 33

Løste Opgaver.

6, (P. Heegaard) 55
7, (F. Bonnesen) 71
Tilføjelse til Løsningen af Opgave 6 (C. J.) 72

Opgaver til Løsning.

22—26, (J. L. W. V. Jensen, P. Heegaard, Dr. J. de Vries, A. N. Godefrey) 32
27—29, (P. Heegaard, C. Juel) 56

Examensopgaver.

Polyteknisk Examen (Januar 1892) 25

[illegible]

[illegible]

[illegible] Mathematik [illegible]

[illegible] Begriff [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Approximativ Beregning

af de reelle Rødder i den logarithmiske Ligning af 1ste Grad

af cand. polyt. J. B. Bruun, Maskininspektør ved Statsbanerne.

Ved Beregningen af Fyldningsgraderne i en Høj- og Lavtryksmaskines Cylindere opstilles i Reglen den Fordring, at Dampen skal udføre et ligestort Arbejde i begge Maskinens Cylindere. Forudsættes, at Dampen expanderer efter Mariotte's Lov, vil den opstillede Fordring føre til en Ligning af Formen:

$$l\xi_2 + \alpha\xi_2 = f\,(\beta,\xi_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

der skal tjene til Bestemmelse af Fyldningsgraderne ξ_2 i Lavtrykscylinderen, naar der tillægges Fyldningsgraden i Højtrykscylinderen ξ_1 bestemte Værdier. Funktionen f er selvfølgelig bekjendt, og α og β ere Konstanter, der ere afhængige dels af Dampspændingerne og dels af Forholdet mellem Høj- og Lavtrykscylinderens Voluminer. ξ_1 er følgelig en Parameter, og naar der tillægges den en af de for Undersøgelsen nødvendige konstante Værdier, bliver Ligningens højre Side konstant, og (1) kan da skrives:

$$ly + \alpha y = k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

hvor altsaa y er ubekjendt, medens α og k ere givne Størrelser.

Denne Ligning løses let ad grafisk Vej, naar man benytter Substitutionen:

$$x = ly, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hvorved (2) bliver til:

$$x + \alpha y = k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

og de reelle Rødder i (2) findes da som Ordinaterne til Skæringspunkterne mellem den logarithmiske Linie (3) og den

rette Linie (4). Tegnes Kurven op i en nogenlunde stor Maalestok, kan y altid findes med en for den praktiske Anvendelse tilstrækkelig stor Nøjagtighed (1 eller 2 Decimaler). Det er i Praxis af Betydning, at Ligning 3 ikke indeholder nogen Størrelse, der er afhængig af Dampspændingerne eller af Maskinens Dimensioner, idet den samme Kurve derved kan anvendes under alle Forhold, saa at man kun behøver at tegne den op én Gang for alle. *)

De reelle Rødder i (2) kunne imidlertid ogsaa beregnes approximativt men med saa stor Nøjagtighed, man ønsker, paa følgende Maade:

Da den logarithmiske Linie (3), som vi ville kalde K, ikke har noget mærkeligt Punkt, kan en ret Linie kun skære den i højest to Punkter, og da den har Abscisseaxens negative Retning til Asymptote samt en uendelig fjern Linie parallel med Ordinataxen ($x = +\infty$) til Tangent, ligger den ganske i 1ste og 2det Kvadrant, og den rette Linie (4), der kan betegnes L, vil altsaa skære den i 1 Punkt, dersom dens positive Retning danner en Vinkel, der er lig eller større end 90^0 med Abscisseaxens positive Retning, men derimod i 2 Punkter, hvis den nævnte Vinkel er spids. Da ethvert reelt Skæringspunkt mellem K og L svarer til en reel Rod i den forelagte Ligning, vil denne altsaa altid have 1 reel Rod, hvis α er positiv, medens den for α negativ kan have 2 forskjellige, 2 sammenfaldende eller ingen reelle Rødder.

Da Kurven kun ligger i 1ste og 2det Kvadrant, og Rødderne ere bestemte ved Ordinaterne til dens Skæringspunkter med L, maa Ligningens reelle Rødder altid være positive, hvilket iøvrigt ogsaa fremgaar af dens Form, idet α og k forudsættes at være reelle.

For at finde en første Approximation til Rødderne kan man tænke sig Kurven K erstattet af 2 rette Linier, der falde nogenlunde nær sammen med K's positive og negative Gren.

*) I »Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens« vil blive givet en udførlig Redegjørelse af den grafiske Løsning af Ligning 1.

Som den ene af disse Linier kan benyttes Abscisseaxens negative Del, medens den anden maa vælges forskjelligt eftersom α er positiv eller negativ, og vi ville derfor betragte disse to Tilfælde hver for sig.

1. α positiv. Ligningen har da altid 1 positiv reel Rod og har Formen (2). Hjælpeligningerne ere (3) og (4). Kurven tænkes da erstattet af Abscisseaxens negative Del og en Tangent til K igjennem Begyndelsespunktet. Ligningen for en Tangent til et Punkt (ξ, η) paa K er:

$$x - \frac{1}{\eta} y = \xi - 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

og skal denne gaa igjennem Begyndelsespunktet, maa man have $\xi = 1$, der indsat i (3) giver $\eta = e$, saa at Tangentens Ligning bliver:

$$x - \frac{y}{e} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Kaldes denne Linie for P, ses, at naar L skærer Abscisseaxens positive Retning, altsaa naar k er positiv, vil den skære P i 1ste Kvadrant, og dette Skæringspunkt kan i saa Fald tages som 1ste Approximation til Rodpunktet. Er k negativ vil L's Skæringspunkt med Abscisseaxen ligge nærmere Rodpunktet end Skæringspunktet mellem L og P, og det først nævnte Punkt tages derfor i dette Tilfælde som 1ste Tilnærmelse.

For at finde 2den Approximation benyttes samme Fremgangsmaade, hvad enten k er positiv eller negativ, idet nemlig det Punkt paa K bestemmes, der har samme Abscisse som 1ste Approximationspunkt, derpaa trækkes en Tangent til det saaledes bestemte Punkt, og Skæringspunktet mellem denne Tangent og L søges. Dette Skæringspunkts Ordinat kan benyttes som 2den Approximation, idet Punktet ligger nærmere Rodpunktet end det først fundne.

Ved nu at gaa ud fra 2den Tilnærmelse kan man finde en 3die Approximation, der udledes af 2den paa samme Maade, som denne er udledet af 1ste, og ved at fortsætte paa denne Maade, er man altsaa i Stand til at finde Ordinaten til Rodpunktet med saa stor Nøjagtighed, som ønskes.

Fremgangsmaaden er altsaa følgende:

a. k positiv. K tænkes erstattet med Tangenten (6). Skæringspunktet mellem denne og L er:

$$x_1 = \frac{k}{1 + e\alpha}; \; y_1 = \frac{k - x_1}{\alpha}$$

y_1 er da 1ste Approximation.

Det Punkt paa K, der har Abscissen x_1, har Ordinaten $Y_1 = e^{x_1}$.

Tangenten til K i Punktet (x_1, Y_1) har Ligningen:

$$x - \frac{y}{Y_1} = x_1 - 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

og denne Linie skærer L i Punktet:

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1 (x_1 - 1) + k}{\alpha Y_1 + 1}; \; y_2 = \frac{k - x_2}{\alpha}.$$

y_2 er da 2den Approximation.

Ordinaten til det Punkt paa K, der har Abscissen x_2, er $Y_2 = e^{x_2}$, og da Ligningen for Tangenten til (x_2, Y_2) findes af (7) ved at ombytte x_1 med x_2 og Y_1 med Y_2, faar man Koordinaterne til Skæringspunktet mellem denne Tangent og L ved at foretage de samme Ombytninger i Udtrykkene for x_2 og y_2. Disse Koordinater blive da:

$$x_3 = \frac{\alpha Y_2 (x_2 - 1) + k}{\alpha Y_2 + 1}; \; y_3 = \frac{k - x_3}{\alpha}.$$

y_3 er saaledes 3die Approximinationcn. Af denne findes da atter 4de Approximation ved at ombytte x_2 og Y_2 med x og Y_3 o. s. fr.

b. k negativ. K tænkes erstattet med Abscisseaxen. Skæringspunktet mellem denne og L er:

$$x_1 = -k; \; y_1 = 0$$

og 1ste Approximation er følgelig $y_1 = 0$.

De øvrige Tilnærmelser blive de samme som ovenfor funden, naar $+k$ ombyttes med $-k$.

Da $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ stedse er større end Ordinaten η til Rodpunktet, medens denne atter er større end $y_1, y_2 \ldots y_n$, saa at altsaa:

$$Y_n > \eta > y_n,$$

finder man ved den ovenangivne Fremgangsmaade to Grænser, mellem hvilke Roden ligger.

Exempel 1. Rødderne i Ligningen: $ly + y = 2$ søges med 4 rigtige Decimaler.

Man har altsaa $\alpha = +1$ og $k = +2$. Da α er positiv, har Ligningen kun 1 reel Rod.

Man faar da ved at indsætte Værdierne for α og k i de ovenfor fundne Udtryk:

$$x_1 = \frac{k}{1 + e\alpha} = 0{,}5379 \quad ; y_1 = \frac{k - x_1}{\alpha} = 1{,}4621 ; Y_1 = e^{x_1} = 1{,}7123$$

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1(x_1 - 1) + k}{\alpha Y_1 + 1} = 0{,}44565 ; y_2 = \frac{k - x_2}{\alpha} = 1{,}55435 ; Y_2 = e^{x_2} = 1{,}5614$$

$$x_3 = \frac{\alpha Y_2(x_2 - 1) + k}{\alpha Y_2 + 1} = 0{,}44289 ; y_3 = \frac{k - x_3}{\alpha} = 1{,}55711 ; Y_3 = e^{x_3} = 1{,}55718$$

følgelig er: $1{,}55718 > \eta > 1{,}55711$

og η er altsaa $= 1{,}5571$

Exempel 2. Rødderne i Ligningen $ly + y + 2 = 0$ søges med 4 rigtige Decimaler.

$$\alpha = +1 \text{ og } k = -2.$$

Ligningen har følgelig kun 1 reel Rod. Man finder da:

$$x_1 = -k = -2 \quad ; y_1 = 0 \quad ; Y_1 = e^{x_1} = 0{,}13534$$

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1(x_1 - 1) - k}{\alpha Y_1 + 1} = -2{,}1192 ; y_2 = -\frac{k + x_2}{\alpha} = 0{,}1192 ; Y_2 = e^{x_2} = 0{,}12013$$

$$x_3 = \frac{\alpha Y_2(x_2 - 1) - k}{\alpha Y_2 + 1} = -2{,}120002 ; y_3 = -\frac{k + x_3}{\alpha} = 0{,}120002 ; Y_3 = e^{x_3} = 0{,}12003$$

følgelig: $0{,}12003 > \eta > 0{,}120002$

$$\eta = 0{,}1200$$

2. α negativ. Ligningen er da:

$$ly - \alpha y = k, \qquad (8)$$

og Hjælpeligningerne ere (3) og

$$x - \alpha y = k \qquad (9)$$

Ligningen (8) har da, som ovenfor vist, 2 forskjellige, 2 sammenfaldende eller ingen reelle Rødder, eftersom (9) skærer, tangerer eller falder helt udenfor (3).

Skal (9) være parallel med Tangenten (5), hvis Rørings-

punkt er (ξ,η), maa man have $\alpha = \frac{1}{\eta}$ eller $\eta = \frac{1}{\alpha}$, og eftersom (9) skærer, falder i eller falder udenfor (3), (d. v. s. falder til venstre for, sammen med eller tilhøjre for Tangenten) maa k være $\lesseqgtr \xi - 1$. Da nu i Følge (3) $\xi = l\eta = l\frac{1}{\alpha}$, bliver altsaa Betingelsen for, at L skærer, rører eller falder udenfor K:

$$k \lesseqgtr l\frac{1}{\alpha} - 1 \text{ eller } 1 + k \lesseqgtr -l\alpha, \quad \ldots . \quad (10)$$

og (10) er følgelig ogsaa Betingelsen for, at (8) har 2, 1 eller ingen reelle Rødder.

For at finde 1ste Approximation til Rødderne tænkes Kurven ligesom før erstattet med tvende af dens Tangenter, men medens man vel atter kan benytte Abscisseaxen som en saadan, kan Tangenten (6) ikke anvendes. Hvis denne nemlig danner en Vinkel med Abscisseaxen, der er mindre end den Vinkel, L danner med denne Axe, altsaa hvis $\alpha > \frac{1}{e}$, vil den skæres af L i et Punkt, der ligger nærmere ved Abscisseaxen end Røringspunktet mellem K og den med L parallele Tangent, og Følgen heraf vilde være, at saavel Skæringspunktet mellem L og X-Axen som mellem L og (6) begge vilde føre til Bestemmelsen af det samme Rodpunkt (det nederste).

Linien, der skal erstatte den Gren af K, som ligger i 1ste Kvadrant, maa følgelig være saaledes beliggende, at den skærer L i et Punkt, der ligger fjernere fra Abscisseaxen end Berøringspunktet mellem K og den med L parallele Tangent, og dette vil altid være Tilfældet med den Tangent, der kan trækkes til K fra det nævnte Berøringspunkts Projektion paa X-Axen. Denne Tangent bruges derfor til i Forbindelse med X-Axen at erstatte Kurven.

Berøringspunktet for en Tangent $\neq$ L har Abscissen $\xi = l\frac{1}{\alpha} = -l\alpha$. Da nu Projektionen paa Abscisseaxen af det Stykke af Tangenten, der ligger mellem denne Axe og Tangeringspunktet, stedse er lig 1, saa vil en Tangent fra Pun

$(-l\alpha, 0)$ røre K i et Punkt med Abscissen $-l\alpha + 1$, og dets Ordinat er følgelig $e^{1-l\alpha}$, saa at Tangentens Ligning bliver:

$$x - e^{l\alpha - 1}y = -l\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Lad nu Skæringspunkterne mellem K og L være (ξ_1, η_1) og (ξ_2, η_2). Som 1ste Approximation til de to Rodpunkter benyttes da henholdsvis Skæringspunkterne mellem L og (11) og mellem L og X-Axen. 2den Approximation findes ligesom før som Ordinaten til Skæringspunktet mellem L og en Tangent til K i det Punkt, der har samme Abscisse som 1ste Approximationspunkt, og 3die Approximation udledes da af 2den paa samme Maade, som denne er udledet af 1ste o. s. fr.

Vi ville først søge det Rodpunkt (ξ_1, η_1), der ligger fjærnest fra Abscisseaxen.

Skæringspunktet mellem (9) og (11) er:

$$x_1 = \frac{\alpha l\alpha + ke^{l\alpha - 1}}{e^{l\alpha - 1} - \alpha}; \quad y_1 = \frac{x_1 - k}{\alpha}.$$

1ste Approximation er da y_1.

Det Punkt paa K, der har Abscissen x_1, har Ordinaten $Y_1 = e^{x_1}$.

Tangenten til Punktet (x_1, Y_1) er (7). Den skærer (9) i Punktet:

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1 (x_1 - 1) - k}{\alpha Y_1 - 1}; \quad y_2 = \frac{x_2 - k}{\alpha};$$

y_2 er da 2den Approximation, og af denne dannes da 3die ved Ombytning af x_1 med x_2 og Y_1 med Y_2 o. s. fr.

For at bestemme (ξ_2, η_2) søges som 1ste Approximation Skæringspunktet mellem L og Abscisseaxen. Dette er:

$$x_1 = k; \quad y_1 = 0,$$

saa at $y_1 = 0$ er 1ste Approximation.

Skæringspunktet mellem L og Tangenten til Punktet $(x_1, Y_1 = e^{x_1})$ er:

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1 (1 - x_1) + k}{1 - \alpha Y_1}; \quad y_2 = \frac{x_2 - k}{\alpha},$$

og af y_2, der er 2den Approximation, findes da de næste Approximationer paa samme Maade som tidligere.

Det kan bemærkes, at man, naar α er negativ, ikke ligesom for α positiv finder to Grænser, mellem hvilke Rødderne

ligger, idet baade Ordinaterne $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ og $Y_1, Y_2 \ldots\ldots Y_n$ ere større end η_1, medens derimod de tilsvarende Ordinater [illegible] ere mindre end η_2, saa at man faar henholdsvis:

$$Y_n > y_n > \eta_1 \text{ og } y_n < Y_n < \eta_2$$

Exempel 3. Rødderne i Ligningen $ly - 2y + 3 = 0$ søges med 4 rigtige Decimaler.

Man har altsaa $-\alpha = -2$ og $k = -3$.

Da α er negativ og $1 + k < -l\alpha$ $(-2 < -0{,}6931)$, har Ligningen 2 uligestore reele Rødder.

Rodpunktet (ξ_1, η_1).

$$x_1 = \frac{\alpha l\alpha + ke^{l\alpha-1}}{e^{l\alpha-1} - \alpha} = 0{,}6494; \; y_1 = \frac{x_1 - k}{\alpha} = 1{,}8247; \; Y_1 = e^{x_1} = 1{,}9144$$

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1(x_1 - 1) - k}{\alpha Y_1 - 1} = 0{,}58595; \; y_2 = \frac{x_2 - k}{\alpha} = 1{,}79297; \; Y_2 = e^{x_2} = 1{,}7966$$

$$x_3 = \frac{\alpha Y_2(x_2 - 1) - k}{\alpha Y_2 - 1} = 0{,}58315; \; y_3 = \frac{x_3 - k}{\alpha} = 1{,}79158; \; Y_3 = e^{x_3} = 1{,}79166$$

Da man nu skal have:

$$\eta_1 < y_3 < Y_3 \text{ altsaa } \eta_1 < 1{,}79158,$$

kan man sætte: $\eta_1 = 1{,}7915$,

der indsat i Ligningen giver:

$$0{,}58306 - 3{,}5830 + 3 = 0$$
$$3{,}58306 = 3{,}5830.$$

Rodpunktet (ξ_2, η_2).

$$x_1 = -k = -3 \; ; \; y_1 = 0 \; ; \; Y_1 = e^{x_1} = 0{,}049788$$

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1(1 - x_1) + k}{1 - \alpha Y_1} = -2{,}88941; \; y_2 = \frac{x_2 - k}{\alpha} = 0{,}055295; \; Y_2 = e^{x_2} = 0{,}05561$$

$$x_3 = \frac{\alpha Y_2(1 - x_2) + k}{1 - \alpha Y_2} = -2{,}8887 \; ; \; y_3 = \frac{x_3 - k}{\alpha} = 0{,}05565 \; ; \; Y_3 = e^{x_3} = 0{,}05565.$$

Følgelig er: $\eta_2 = 0{,}05565$,

der indsat i Ligningen giver:

$$-2{,}8887 - 0{,}1113 + 3 = 0$$
$$3 = 3.$$

Dersom den briggiske Logarithme forekommer i Ligningen i Stedet for den naturlige, kunne Rødderne findes ganske som ovenfor angivet, idet kun de fornødne Ændringer maa foretages med Ligningerne. Ligning 2 vil [illegible]

$$\log y + \alpha y = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Ligning 3 ændres til $\log y = x$, medens 4 bliver uforandret.

Ligningen for Tangenten til (12) er:

$$x - \frac{M}{\eta} y = \xi - M, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

og (6) ændres da til:

$$x - \frac{M}{10^M} y = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Skæringspunktet mellem denne Linie og (4) bliver:

$$x_1 = \frac{k}{1 + \frac{10^M}{M}\alpha}; \quad y_1 = \frac{k - x_1}{\alpha},$$

og Ordinaten til det Punkt paa K, der har Abseissen x_1, er $Y_1 = 10^{x_1}$. Da Tangenten til (x_1, Y_1) er:

$$x - \frac{M}{Y_1} y = x_1 - M,$$

bliver dennes Skæringspunkt med L (2det Approximationspunkt):

$$x_2 = \frac{\alpha Y_1 (x_1 - M) + kM}{\alpha Y_1 + M}; \quad y_2 = \frac{k - x_2}{\alpha},$$

og heraf udledes let de øvrige Approximationsværdier.

Er α negativ, bliver Betingelsen for, at Ligningen har 2, 1 eller ingen reelle Rødder:

$$k + M \lesseqgtr \log \frac{M}{\alpha},$$

og Ligningen for Tangenten (11) antager Formen:

$$x - \frac{My}{10^{\log \frac{M}{\alpha} + M}} = \log \frac{M}{\alpha}.$$

Denne Tangent skæres af (9) i Punktet:

$$x_1 = \frac{\alpha \log \frac{M}{\alpha} \cdot 10^{\log \frac{M}{\alpha} + M} - kM}{\alpha \cdot 10^{\log \frac{M}{\alpha} + M} - M}; \quad y_1 = \frac{x_1 - k}{\alpha}$$

hvor y_1 er 1ste Approximation, og de øvrige Approximationsværdier findes da paa samme Maade som tidligere.

Ved Hjælp af det foran udviklede kunne de reelle Rødder ogsaa findes approximativt i en exponentiel Ligning af Formen:

$$a^{n(x+p)} + bx = c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

idet denne nemlig ved Substitutionen $y = a^{n(x+p)}$, hvoraf $x = \frac{ly}{nla} - p$, omformes til:

$$ly + \frac{nla}{b} y = \frac{c + bp}{nla},$$

der har Formen (2), og hvis reelle Rødder altsaa kunne findes, som ovenfor vist.

Ligningen 15 har følgelig altid 1 og kun 1 reel Rod, hvis $\frac{nla}{b}$ er positiv. Er denne Størrelse derimod negativ, faar Ligningen 2, 1 eller ingen reelle Rødder eftersom:

$$\frac{c + bp}{nla} \lesseqgtr l \frac{b}{nla} - 1.$$

Studie over en Transformation af Laguerre.

(Af C. Juel.)

I Aarene 1880—85 har den franske Mathematiker Laguerre fremsat en i flere Henseender mærkelig Transformation ved Hjælp af Halvlinier. En saadan defineres som en ret Linie forsynet med et bestemt Løb (Omløbsretning); giver man Linien det modsatte Løb, faas en ny Halvlinie, der ogsaa ved Transformationen faar en hel anden tilsvarende.

I Overensstemmelse hermed kan man ogsaa forsyne enhver lukket Kurvegren med Løb, og en Tangent til denne tillægges det samme Løb som det Element, den har fælles med Kurven. En med et bestemt Løb forsynet Cirkel ville vi med Laguerre kalde en Cycle; dennes Radius kan regnes med Fortegn. Fordelen ved en Fastholden ved disse Regler er væsentlig den, at Bestemmelser, der ellers ere flertydige, derved blive éntydige. Der kan saaledes til en Cycle kun drages én berørende Halvlinie parallel med en given, og til tre givne Halvlinier findes kun én berørende Cycle. Ligeledes have to

Cycler højest to fælles berørende Halvlinier og de have i alle Tilfælde netop èt Lighedspunkt. To Halvlinier regnes kun for parallele, naar de tillige stemme overens i Løbet.

Laguerre har nu paavist en simpel Transformation, hvorved man af en af Halvlinier og Cycler dannet Figur kan udlede en anden. Konstruktioneu er den følgende;

I Planen er fastlagt en bestemt Axe Ω, en Cycle K og et Punkt P, der ligger i Perpendikulæren fra Cyclens Centrum O paa Ω. Den tilsvarende til en given Halvlinie MN konstrueres nu paa følgende Maade; til Cyclen drages en berørende Halvlinie AB parallel med MN, Røringspunktet A forbinder man ved P, og i det Punkt A', hvor PA anden Gang skærer Cyclen, drages den berørende Halvlinie A'B'. Den til MN svarende Halvlinie drages derpaa gjennem den førstes Skæringspunkt M ved Ω og parallel med A'B',

Det interessante ved denne Transformation og det, som adskiller den fra andre mere bekjendte, er det, at den udelukkende har direkte Betydning ligeoverfor reelle Figurdele. For en imaginær Linie har nemlig Bestemmelsen Løb i den Forstand, hvori den her skal benyttes, ingen Betydning. Transformationen maa i almindelig analytisk-geometrisk Forstand siges at være (2,2)-tydig, men den deler sig i to adskilte (1,1)-tydige ved at tilføje Gruppen af reelle Elementer.

Den følgende Studie har jeg delt i tre Stykker. I den første søger jeg i Korthed at hæve den tilsyneladende Tilfældighed, der ligger i den ved første Øiekast noget besynderlige Konstruktion. Hertil giver forøvrigt Laguerre selv Ideen ved stadig at parallellisere sin nye Transformation med den velbekjendte Inversion. Dette gaar ikke i Planen, men som let ses paa Kuglen.

I det andet Stykke opstiller jeg Transformationen paa en ny Maade. Man vil maaskè indvende, at denne skjøndt ren geometrisk dog forsaavidt er mindre elementær end den originale, som den indskyder et Keglesnit som Mellemled. Der er dog en Omstændighed som bevirker, at dette alligevel er simplere.

Laguerre forudsætter nemlig (om end med enkelte Undtagelser) i sine forøvrigt yderst elegante Beviser, enten at T ligger udenfor Cyclen K eller indeni denne — eftersom det ene eller det andet falder naturligst. Men ved denne Transformations Theori, hvor Realiteten af Figurdelene udtrykkelig maa forudsættes, har man ikke Lov til at anvende det ellers brugelige (Poncelet'ske) Kontinuitetsprincip. De her førte Beviser ere almèngyldige.

I det sidste Stykke opstiller jeg den almindeligste Halvlinietransformation, der tillige fører Cycle over i Cycle og undersøger, hvorvidt denne kan reduceres til Laguerres Normalform.

I. Transformationen paa Kuglen.

Enhver Cirkel paa Kuglen kan man tillægge et Løb og derved danne en sfærisk Cycle. En med Løb forsynet Storcirkel vil jeg kalde en sfærisk Halvlinie.

Enhver Storcirkel har to Poler. En sfærisk Halvlinie kan man imidlertid tilordne en éntydig bestemt Pol r, nemlig den, hvorfra Løbet ses at gaa i Uhrets Retning. Den Transformation, der ombytter en Pol med den tilhørende sfæriske Halvlinie (og omvendt) vil jeg kalde en Poltransformation. *)

Med disse Betegnelser kan man simpelt sige, at tilsvarende Figurer i en sfærisk Halvlinietransformation (der tillige transformerer Cycler i hinanden) kan dannes ved at transformere inverse Figurer paa Kuglen ved en Poltransformation.

Tilsvarende Punkter i inverse Figurer paa en Kugle have nemlig en Forbindelseslinie, der gaar gjennem et fast Punkt P af Rummet; derfor ville tilsvarende Halvlinier skære hinanden paa en fast Storcirkel Ω, hvis Plan er vinkelret paa den gjennem P gaaende Diameter. At Cycle vil svare til Cycle ved Halvlinietransformationen følger af, at dette er Tilfældet baade ved Inversionen og ved Poltransformationen. End[illegible] ligge to Par tilsvarende Punkter i de inverse Figurer [illegible] irke

*) Den sædvanlige Overgang fra en sfærisk Trekant skér ved en Poltransformation.

derfor maa to Par tilsvarende Halvlinier altid berøre samme Cycle, (der ved Transformationen gaar over i sig selv). Man ser nu, at Transformationen er fastlagt ved Ω og to Par tilsvarende sfæriske Halvlinier; man kan nemlig benytte sig af den foregaaende Sætning til derved at konstruere den tilsvarende til en vilkaarlig ny Halvlinie. I det Hele giver denne Opfattelse særdeles let Adgang til samtlige Hovedegenskaber ved en sfærisk Halvlinietransformation. At nu denne svarer til Laguerres Transformation, kan man sé ved at lade Kuglens Radius voxe og blive saa stor, at man indenfor et vist Omraade uden mærkelig Feil kan danne ligedannede Figurer. I saa Fald kan man ved Parallelforskydning og Multiplikation bringe de i den nysantydede Konstruktion af tilsvarende Halvlinier benyttede Cycler til at falde sammen med en fast Cycle, og ved Læren om Pol og Polar med Hensyn til en Cirkel sés det da let, at man netop paa en naturlig Maade ledes til Laguerres Transformation.

II. Ændret Fremstilling af Laguerres Halvlinietransformation i Planen.

I den faste Plan π vælges en fast Axe Ω og gjennem den lægges en fast Plan μ, der med π danner en Vinkel, der er mindre end 45^0. For at finde den tilsvarende til en forelagt Cycle K lægger man gjennem denne den Omdrejningskegleflade med en Toppunktsvinkel paa 90^0, fra hvis Toppunkt Cyclens Løb sés rettet med Uhret. Den derved entydigt bestemte Kegleflade skærer μ i en Ellipse med konstant Excentricitet, der har sin store Axe vinkelret paa Ω. Man kan derpaa altid vælge en saadan skraa Afbildningsretning, *) at Billedet af Ellipsen paa π atter bliver en Cirkel, og denne bliver forsynet med et bestemt Løb svarende til Løbet paa K. Med Benyttelse af de samme Overgangsled — simplest maaske ved at lægge en berørende Cycle — ser man, at der ogsaa til enhver forelagt Halvlinie atter svarer en saadan.

*) Af de to h· Muligheder udvælges og fastholdes en enkelt.

Man har altsaa:

Til hver Halvlinie svarer en anden Halvlinie, der skærer den første i et Punkt af Ω.

Til hver Cycle svarer en anden Cycle, og Ω vil være deres Radikalaxe.

Den sidste Paastands Rigtighed er uafhængig af, om Cyclerne skære eller ikke skære Ω, thi i hvert Fald vil der paa Ω findes samme Involution af konjugerede Punktpar med Hensyn til begge Cirklerne.

Forstaar man endvidere ved to Cyclers Tangentafstand Afstanden mellem disses Røringspunkter med en Halvlinie, der berører begge Cyclerne, haves:

Tangentafstanden mellem to Cycler forandres ikke ved Transformationen. Naar nemlig en Halvlinie berører to Cycler α og β i A og B, vil den tilsvarende Halvlinie berøre de tilsvarende Cycler α_1 og β_1 i Punkter C og D. Naar nu det for Ω, AB og CD fælles Punkt er F, bliver $FA = FC$, $FB = FD$ — fordi Ω er fælles Radikalaxe for α og α_1, β og β_1 — og heraf faas ved Subtraktion $AB = CD$.

Denne Sætning svarer til, at ved Inversionen blive Vinkler uforandrede.

Endvidere maa enhver Cycle K, der berører to tilsvarende (adskilte) Halvlinier svare til sig selv.

Lad nemlig Cyclen K berøre de to Halvlinier α og α_1 i A og B. Til K maa der da ifølge den foregaaende Sætning svare en Cycle K_1, der berører α_1 i B. Men i saa Fald bliver α_1 Radikalaxe for K og K_1, og da Ω skal være Radikalaxen, kan Modsigelsen kun hæves derved, at K og K_1 falde sammen.

Man kan nu ved Hjælp af denne sidste Sætning, naar Ω og et Par tilsvarende Halvlinier ere givne, konstruere den tilsvarende til en vilkaarlig forelagt ny Halvlinie, og det første Par kan vælges aldeles vilkaarligt. Denne Konstruktion er fuldstændig uafhængig af, om man henregner den nye Halvlinie til den ene eller den anden Figur. Heraf følger den mærkelige Sætning:

Transformationen er involutorisk (Figurerne ombyttelige). *)

Af de to sidste Sætninger udiedes endnu, at to vilkaarlige Par tilsvarende Halvlinier berøre samme Cycle.

Man ser endvidere, at tilsvarende Cycler have Fællestangenter med faste Retninger, nemlig Sporene for de to Tangentplaner, man i den skraa Afbildningsretning kan lægge til en af Keglerne. Dette Resultat har ved denne Begrundelse ogsaa Mening, naar Fællestangenterne ere imaginære. Man maa i saa Fald sige, at Involutionen af fælles konjugerede Liniepar med Hensyn til to tilsvarende Cycler blot bliver parallelforskudt ved at gaa over til et andet Par.

Hermed er Rækken af Laguerres Hovedsætninger udtømt; selv indenfor det ganske elementære Omraade findes der dog endnu adskillige Smaaopgaver, der frembyde sig. Man kan saaledes spørge, om Beskaffenheden af den Samling Cycler, hvis tilsvarende have Radius nul, ere »Punktcycler«. Man sér af Konstruktionen i Rummet umiddelbart, at Samlingen bestemmes ved

$$\frac{r}{d} = \text{tgv.} = \text{const.},$$

hvor r er Cyclens Radius, og d Centrets Afstand fra Axen Ω. Man sér ogsaa let, at Samlingen af de Cirkler, der svare til sig selv, er af samme Karakter o. s. v.

Som Exempel paa den Nytte, man kan have af Transformationen, vil jeg tage Beviset for en mærkværdig Sætning af Casey. Dette Bevis lider af den Mangel, at Linien gjennem tre af Lighedspunkterne for tre indgaaende Cycler maa forudsættes ikke at skære nogen af disse Cycler. Beviset byder paa den anden Side i hvert Fald den Fordel, at man lige saa let faar den omvendte Sætning bevist, noget, der ikke synes mig at være Tilfældet ved Casey's oprindelige Bevis (ved Inversion).

Ved i Udtalelsen af Sætningen at ombytte Cirkel med Cycle bliver denne tillige mere bestemt, idet Tangentafstanden

*) Det er en god om end simpel Øvelsesopgave i elementær Stereometri at vise dette direkte ved den omgivne Konstruktion i Rummet.

mellem to Cycler (men ikke mellem to Cirkler) er en éntydig bestemt Længde. Derimod ser jeg ikke, at man ved en Vedtægt kan bortskaffe en vis Fortegnsubestemthed, thi det indsees ikke let, paa hvilken Maade man kan regne Tangentafstande med Fortegn.

Casey's Sætning lyder:

Naar 4 Cycler ABCD berøre en vilkaarlig ny Cycle E, har man en Identitet af Formen

$$(AB)(CD) \pm (AC)(BD) \pm (AD)(BC) = o,$$

hvor (AB) betyder Tangentafstanden mellem Cyclerne (A) og (B) o. s. v.

Gjennem Cyclerne (A), (B) og (C) lægges paa den tidligere nævnte Maade Omdrejningskegler, og den Plan, der forbinder disses Toppunkter vælges som Planen μ i Konstruktionen. Hermed er bestemt en Halvlinietransformation, der fører (A) (B) og (C) over i Punktcycler (α) (β) og (γ) — hvorved, som ovenfor nævnt, er forudsat, at Linien $\Omega = (\mu . \pi)$ ikke skærer Cyclerne. (E) transformeres i en Cycle (ε), der indeholder Punkterne $\alpha\beta\gamma$, (Centrerne for Punktcyclerne), og (D) i en Cycle (δ), der berører (ε) i et vist Punkt D_1. Cirklerne (ε) og (δ) bestemme nu et Bundt, hvori der findes en uendelig lille Cirkel svunden ind til Punktet D_1. Efter en meget bekjendt Sætning vil der nu være et konstant Forhold mellem Tangenten fra et vilkaarligt Punkt M i (ε) til (δ) og Tangenten fra M til Nulcirklen d. v. s. Afstanden MD_1. Man har derfor

$$(1) \qquad (\alpha\delta) = k . \alpha D_1 ; \; (\beta\delta) = k . \beta D_1 ; \; (\gamma\delta) = k . \gamma D_1 .$$

Indsættes dette i Ptolemæus Ligning:

$$(2) \qquad \alpha\beta . \gamma D_1 \pm \beta\gamma . \alpha D_1 \pm \alpha\gamma . \beta D_1 = o,$$

faar man, da Tangentafstanden mellem to Nulcirkler er lig Centrernes Afstand,

$$(3) \qquad (\alpha\beta)(\gamma\delta) \pm (\beta\gamma)(\alpha\delta) \pm (\alpha\gamma)(\beta\delta) = o.$$

Heraf følger efter det tidligere umiddelbart Casey's Sætning.

Men den omvendte Sætning bevises ved de samme Ligninger.

Lad os nemlig forudsætte, at (3) existerer, medens man

ikke ved, om (δ) berører (ε). Ogsaa i saa Fald vil der i det ved (δ) og (ε) bestemte Punkt findes en Nulcirkel med et vist Centrum D_1, der tillader Dannelsen af Ligningerne (1). Derved kan man fra (3) vende tilbage til (2), der taget ved passende Fortegn udtrykker, at $\alpha\beta\gamma$ og D_1 ligge paa samme Cirkelperiferi. Men Centret for en Nulcirkel i et Bundt kan kun da ligge paa én af Bundtets Cirkler, naar Cirklerne berøre hinanden.

Af den beviste Sætning kan man drage den Slutning, dog kun efter en særlig Fortegnsdiskussion, at Røringscirklerne til 3 givne Cirkler dele sig i Grupper paa 4, der berøre en og samme nye Cirkel — en Sætning, der indeholder en bekjendt Sætning om Nipunktscirklen.

III. Den almindelige Halvlinietransformation.

Vi ville nu undersøge den almindeligste af de Halvlinietransformationer, der tillige fører Cycler over i hinanden. Til denne Undersøgelse benyttes bekvemmest det samme Hjælpemiddel som i forrige Stykke, idet man gjennem hver Cycle lægger den Omdrejningskegle*) med fast Toppunktsvinkel paa 90^0, fra hvis Toppunkt Cyclens Løb sés at gaa i Uhrets Retning. Ved Transformationen blive da Rummets Punkter knyttede éntydigt til hinanden. Endvidere maa der til Punkterne af en ret Linie L i Rummet svare Punkterne af en anden ret Linie L_1. Keglerne med Toppunkter i L skære nemlig Figurernes Plan π i Cycler, der berøre to faste Halvlinier, og da der til en saadan Cyclesamling maa svare en anden af samme Beskaffenhed, vil det geometriske Sted for de Toppunkter, der bestemmes ved de tilsvarende Cycler ogsaa være en ret Linie. Denne Slutning forudsættes ganske vist (da vi indtil videre ubetinget maa fastholde Figurdelenes Realitet), at Linien L danner en Vinkel med π, der er mindre end 45^0. Men Paastanden er alméngyldig, thi allerede ved Benyttelse af saadanne Linier kan man bevise, at Plan svarer til Plan — i enhver Plan kan jo drages uendelig mange Linier der med

*) Ved Kegle skal her og stadig i det efterfølgende forstaas Kegleflade.

a danner en Vinkel, der er mindre end 45^0 — og til to Planers Skæringslinie maa svare de tilsvarende Planers Skæringslinie. Vi have herved bevist, at Afhængigheden er collineær (projektiv). Den uendelig fjerne Plan svarer til sig selv, thi det skal antages at ligge i Forudsætningerne, at der til en Cycle med endelig Radius atter svarer en saadan. I Collineationen ville ikke blot Keglernes Toppunkter men ogsaa selve Keglerne og disses Tangentplaner svare til hinanden; tilsvarende Tangentplaner skære derfor π i tilsvarende Halvlinier, medens to vilkaarlige tilsvarende Planer iøvrigt ikke ville skære i saadanne. Man maa altsaa have

Rækkerne af tilsvarende berørende Halvlinier til to Cycler ere indbyrdes projektive.

Lad nu en Række Cycler $\alpha\beta\gamma\ldots$ berøre to Halvlinier m og n, og lad de Punkter, hvori de berøre m være ABC... Lad de tilsvarende Cycler berøre den tilsvarende Halvlinie m_1 i $A_1B_1C_1\ldots$ Da Rækken af de gjennem ABC... gaaende Keglefrembringere er projektiv med Rækken af de gjennem $A_1B_1C_1\ldots$ gaaende tilsvarende, blive Punktrækkerne ABC... og $A_1B_1C\ldots$ projektive eller rettere ligedannede, da deres uendelig fjerne Punkter svare til hinanden.

Man har altsaa

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \text{konst.} = \varepsilon.$$

Man vil heraf let sé, at Forholdet mellem to vilkaarlige tilsvarende Par Cyclers Tangentafstand maa være konstant. Haves nemlig to vilkaarlige Cycler ϱ og σ der berøre en Halvlinie p i R og S, kan man lægge to nye Cycler ϱ' og σ', der henholdsvis berøre p i de samme Punkter som ϱ og σ, og tillige n i to Punkter R' og S'. Man vil da have (idet Index 1 tilføjes for de tilsvarende Punkter)

$$\frac{RS}{R_1S_1} = \frac{R'S'}{R_1'S_1'} = \varepsilon.$$

Ved en Halvlinietransformation maa Forholdet mellem to tilsvarende Par Cyclers Tangentafstand være konstant $= \varepsilon$.

ε skal kaldes Transformationens Modulus.

Til Figurens Plan π svarer i Collineationen en anden Plan π_1, som vi først ville antage ikke er parallel med π. Disse to Planer skære da hinanden i en Linie Ω, hvis tilsvarende Linie Ω' ogsaa ligger i π. Punktrækkerne paa Ω og Ω' ere ligedannede. Men tilsvarende Punkter kunne her opfattes paa en anden Maade end før. I dette Tilfælde ville tilsvarende Punkter nemlig være Centrer for tilsvarende Punktcycler, thi de blive Toppunkter for tilsvarende Kegler i Rummet.

Multiplicerer man nu den ene af de to ved Halvlinie-transformationen sammenhørende Figurer med Modulus ε, kan derefter denne Figur (paa to Maader) lægges saaledes i Planen at Ω og Ω' og alle tilsvarende Punkter paa disse falde sammen. Tilsvarende Cycler maa skære hinanden paa Ω, forsaavidt de overhovedet skære hinanden. I hvert Fald maa dog Ω være Radikalaxen for tilsvarende Cycler, thi ethvert Punkt af Ω bliver ifølge den foregaaende Sætning Centrum for en fælles Orthogonalcirkel for Cyclerne. Da tilsvarende Halvlinier ogsaa skære hinanden paa Ω, ses det endvidere aldeles som før, at en Cycle, der berører to tilsvarende Halvlinier, svarer til sig selv. Da nu Konstruktionen af tilsvarende Halvlinier med Benyttelse af denne Sætning kan udføres alene ved Ω og ét Par tilsvarende Halvlinier, kan Sammenhængen mellem Figurerne i denne Stilling ikke være forskellig fra Laguerres.

Tilbage staar det Tilfælde, hvor π og π_1 ere parallele. Ogsaa i dette Tilfælde sørge vi først ved Multiplikation med Modulus ε for, at alle tilsvarende Tangentafstande blive ligestore.

Til Punktcycler i den ene Figur svarer her i den anden Figur Cycler med en konstant Radius, der er Afstanden mellem π og π_1. Lad tre Punktcyclers Centrer være ABC, medens $A_1B_1C_1$ ere Centrerne for de tilsvarende Cycler. Da man let sér, at de to Cycler, der svare til en forelagt Punktcycle ligge paa samme Cirkel, kan man lade alle de til Punktcyclerne svarende Cycler have samme Løb. I saa Fald vil Tangent-afstanden mellem Cyclerne være lig med Centerlinien, saa at

man har $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$. Man kan derfor lægge Figurerne saaledes, at $\triangle ABC$ dækker $\triangle A_1B_1C_1$. Da et Punkt er utvétydigt bestemt ved dets Afstande fra tre Punkter, vil hver Punktcycle nu have en concentrisk tilsvarende. Heraf følger atter, at enhver Cycle maa være concentrisk med sin tilsvarende, thi en Cycle, der berører tre givne ligestore Cycler ved samme Løb, maa have samme Centrum som den Cycle, der gaar gjennem de givnes Centrer.

Tilsvarende Cyclers Radier have en konstant Sum eller Differens (to adskilte Muligheder). Kun konstant Sum giver involutorisk Sammenhæng. Man sér à posteriori let, at denne Afhængighed netop bliver den Grænse, hvortil Laguerres nærmer sig, naar man lader Axen Ω fjerne sig i det uendelige.

Vi have altsaa bevist:

En vilkaarlig Halvlinietransformation dannes ved at sammensætte en Drejning, en Multiplikation og en Laguerres Transformation — i den sidste medindbefattet den specielle med uendelig fjern Axe.

Den specielle Transformation er i det væsentlige forøvrigt Aarhundreder gammel og ofte anvendt ved Konstruktioner. (Sé Julius Petersen, Methoder og Theorier til Løsn. af geom. Konstr. Opg. S. 63).

Det er nødvendigt noget nøjere at betragte den Collineation, der svarer til, at Figurerne have den af Laguerre angivne Beliggenhed. Dette udledes deraf, at der findes uendelig mange Punkter i Rummet, der svare til sig selv, nemlig Toppunkterne for de Kegler, som gaa gjennen Cycler, der berøre to tilsvarende Halvlinier. Endvidere maa ethvert Punkt af en Linie, der forbinder to til sig selv svarende Punkter, ogsaa svare til sig selv, Da nu ikke alle Punkter kunne svare til sig selv, maa der findes en (gjennem Ω gaaende) Plan, hvis Punkter svare til sig selv. Collineationen er derfor en Centralcollineation. Da yderligere de to Figurer skulle være ombyttelige og den uendelig fjerne Plan svare til sig selv, maa den være en involutorisk Affinitet d. v. s. Forbindelseslinien mellem et vil-

kaarligt Par tilsvarende Punkter maa have en bestemt Retning og halveres af en fast Plan.

Men ikke enhver Collineation af denne Art giver os en Laguerres Transformation. Dertil kræves jo nemlig, at selve de ofte omtalte Omdreiningskegler blive tilsvarende, og til Omdrejningskegler vil der ved en affin Transformation i Almindelighed ikke svare saadanne.

To Omdrejningskegler med parallele Axer og samme Toppunktsvinkel have imidlertid altid et uendelig fjern Keglesnit fælles og de skære derfor hinanden i endnu et Keglesnit. For saa vidt Forbindelseslinien mellem Keglernes Toppunkter er parallel med en fast Linie L, maa Planerne for disse Snitkurver være parallel med Polarplanen til L's uendelig fjerne Punkt med Hensyn til en af Keglerne. Linien L drage vi nu gjennem et Kegletoppunkt A, og lad dens Spor i Figurernes Plan π være B. Sporet V for L's Polarplan vil da for det første være vinkelret paa L.

Lad endvidere Forbindelseslinien mellem B og Centret O for Keglens Spor skære V i C. Man har da

$$OB \,.\, OC = OA^2,$$

hvoraf sés, at Trekanterne AOB og COA ere ligedannede. Heraf følger, at for det andet Vinklerne OBA og OCA ere Komplementvinkler.

Ere disse to Betingelser tilfredsstillede, vil hver Cycle faa sin bestemte tilsvarende og man har en Halvlinietransformation.

Man slutter heraf, at Afhængigheden mellem to Figurer i Laguerres Beliggenhed er bestemt ved to tilsvarende Cycler.

Tegnes nemlig de gjennem Cyclerne gaaende Kegler, vil Forbindelseslinien mellem disses Toppunkter bestemme Collineationscentret og Planen for Skæringslinien mellem Keglerne bestemme Collineationsplanen.

Vi ville nu løse den Hovedopgave, der her naturlig frembyder sig, nemlig … rmange Par tilsvarende Elementer, m… ise:

En Halvlinietransformation er bestemt ved sin Modulus og tre Par tilsvarende Halvlinier.

Man kan let sé, at der i hvert Fald ikke kan vælges flere end tre Par vilkaarligt. Ved de tre Par tilsvarende Halvlinier blive nemlig ogsaa de to berørende Cycler K og K_1, samt disses Tangenter bestemte som parvis tilsvarende, paa Grund af den ovennævnte Projektivitet.

Da endvidere Forholdet mellem tilsvarende Tangentafstande er bekjendt lig Modulus, sés det let, at man til hver Cycle kan konstruere en tilsvarende. Fordi en saadan Konstruktion imidlertid er mulig paa flere Maader, kræves det godtgjort, at enhver Cycle virkelig faar en enkelt bestemt tilsvarende. Dette skal her gjøres ved at vise, at Cyclerne K og K_1 kunne lægges saaledes, at Figurerne komme i den af Laguerre angivne Beliggenhed — efter naturligvis først at have multipliceret den ene af Figurerne med Modulus.

Lad Røringspunkterne mellem K, K_1 og de 3 Par Halvlinier være henholdsvis AA_1, BB_1, CC_1. Tænkes K og K_1 at ligge i den Stilling, man ønsker, ville Tangenterne i disse Punkter skære hinanden i Radikalaxen Ω for K og K_1; derfor maa Forbindelseslinierne AA_1, BB_1, CC_1 alle gaa gjennem Lighedspunktet O for K og K_1.

Men da er

$$OA \,.\, OA_1 = OB \,.\, OB_1 = OC \,.\, OC_1 = K.$$

Heraf følger, at Trekanterne OAB og OB_1A_1 blive ligedannede, og altsaa

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OB_1} = \frac{OA \,.\, OB}{K}.$$

Paa samme Maade er

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{OA \,.\, OC}{K}.$$

Divisjon af disse giver

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{A_1B_1} : \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Paa samme Maade udledes

$$\frac{OA}{OC} = \frac{BA}{B_1A_1} : \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (2)$$

Lægges nu Punkterne A, B og C fast, kan man ved Hjælp af (1) og (2) finde O som et af Skæringspunkterne mellem to Cirkler. En Inversion med O som Inversionscentrum og med en passende valgt Inversionspotens vil nu invertere Punkterne A_1, B_1 og C_1 i Vinkelspidserne $A_2B_2C_2$ af en Trekant, der er kongruent med $A_1B_1C_1$ (to Muligheder). De om ABC og $A_2B_2C_2$ omskrevne Cycler kunne nu opfattes som nye Stillinger af K og K_1, saaledes at de givne tilsvarende Halvlinier komme til at skære hinanden paa Cyclernes Radikalaxe. I Henhold til den foregaaende Sætning er herved Paastanden godtgjort.

Tillæg.

Efter at have skrevet ovenstaaende har jeg lagt Mærke til, at det allerbekvemmeste Bevis for Casey's Udvidelse af Ptolemæus Sætning hverken faas ved Inversion eller ved Halvlinietransformationen, men derimod ved en direkte Figurbetragtning.*) Lad Cyclerne (A), (B), (C) og (D) berøre en femte Cycle (D) i A, B, C og D; Radierne regnede med Fortegn være $r_1r_2r_3r_4$ og R. Lad Linien AB anden Gang skære henholdsvis (A) og (B) i R og S. Cyclerne (A) og (B) ere nu ligedannede og derved blevne dels Røringspunkterne U og V med den fælles berørende Halvlinie (af Længde (AB)), dels A og S, dels R og B énsliggende Punkter. Man har derfor uden Hensyn til Fortegn

$$\frac{AS}{UV} = \frac{UV}{RB}, \qquad \text{eller}$$

(1) $$UV^2 = (AB)^2 = AS \, . \, RB.$$

Endvidere ere Cyclerne (A) og (E) ligedannede med deres Røringspunkt A som Lighedspunkt. Derfor har man

*) Et lignende Bevis ad trigonometrisk Vej findes i Salmon, A treatise on conic sections 3. éd. — dog uden Angivelse af den omvendte Sætning.

$$\frac{AR}{AB} = \frac{r}{R},$$ eller

(2) $$\frac{AB}{RB} = \frac{R}{R - r_1} = \frac{R}{d_1},$$

idet vi for Kortheds Skyld sætte $R - r_i = d_i$.

Paa samme Maade faar man

(3) $$\frac{AB}{SA} = \frac{R}{d_2}.$$

Multiplikation af (2) og (3) giver med Benyttelse af (1)

$$\frac{\overline{AB}^2}{RB \,.\, SA} = \frac{\overline{AB}^2}{(AB)^2} = \frac{R^2}{d_1 d_2}.$$

Man har altsaa

$$(AB) = AB \,.\, \frac{R}{\sqrt{d_1 d_2}}$$

og de analoge Udtryk.

Man kan altsaa udlede Casey's Sætning af Ptolemæus:

$$AB \,.\, CD \pm AC \,.\, BD \pm BC \,.\, AD = 0$$

ved helt igjennem at multiplicere med

$$\frac{R^2}{\sqrt{d_1 d_2 d_3 d_4}}.$$

Den omvendte Sætning bevises paa samme Maade, idet man først lægger en Cirkel (E), der berører (A), (B) og (C) i A, B og C. Punktet D erstattes derimod med Centret for en Nulcirkel i det Bundt, der bestemmes ved (D) og (E), og Slutningerne S. 16 vise da, hvorledes Beviset skal føres tilende.

Heller ikke den S. 16 omtalte Fortegnstvivl spiller saa uheldig en Rolle, som man egentlig skulde mene. Dette beror paa, at Relationen

$$AB \,.\, CD \pm AC \,.\, BD \pm BC \,.\, AD = 0$$

for saavidt den overhovedet er rigtig for en eller anden Fortegnskombination, ubetinget[*] og i alle Tilfælde betyder, at A, B, C og D ligge paa en Cirkel. Det analoge gjælder da ogsaa om Casey's Sætning.

Eksamensopgaver.

Polyteknisk Eksamen. Januar 1892.

Kemikere.

1. Find det Areal som indesluttes af den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er:

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

2. Find Asymptoterne til den Kurve, hvis Ligning i retvinklede Koordinater er:

$$a^4 + x^4 - x^2y^2 = 0,$$

og angiv Kurvens Figur.

Opløsning. 1. Kurven er en Ellipse. Naar man drejer Koordinatsystemet 45^0 om Begyndelsespunktet, faar man som Ligning for Kurven

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{1} = 1$$

Arealet er da 2π. —

2. Ad sædvanlig Vej findes det, at Kurven har Asymptoterne

$$x = 0, \quad y = \pm x.$$

Mellem $x = 0$ og $y = x$ ligge to uendelige Grene, mellem $x = 0$ og $y = - x$ ligge to andre. I Punkterne $x = \pm a$, $y = \pm a\sqrt{2}$ ere Tangenterne parallele med X-Axen.

Ingeniører.

I.

1. At integrere den totale Differentialligning

$$e^y dx - xe^y dy + z(x^2 + e^{2y})\,dz = 0.$$

2. De to Differentialligninger:

$$(2x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (4x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + (4x^2 - 2x + 2)\,y = 0,$$

$$\cos x \,.\, \frac{d^2y}{dx^2} + (\sin x - 2\cos x)\frac{dy}{dx} + (\cos x - \sin x)\,y = 0,$$

have et fælles partikulært Integral. Find det fuldstændige Integral til hver Ligning især. —

Opløsning. 1 Differentialligningen omskrives til:

$$\frac{e^y dx - xe^y dy}{x^2 + e^{2y}} + zdz = 0,$$

som giver:

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{e^y}\right) + \frac{1}{2} z^2 = C.$$

Integration efter den sædvanlige Methode frembyder ingen Vanskelighed.

2. Naar man mellem de to Differentialligninger eliminerer $\frac{d^2y}{dx^2}$, faar man

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

saa at det fælles partikulære Integral er:

$$y = Ae^x.$$

Til Integration af de to Differentialligninger benyttes derefter Methoden af de arbitrære Konstanters Variation. Til Bestemmelse af A faar man for den første Differentialligning:

$$\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{-4x^2 + 4x - 3}{2x - 1} \frac{dA}{dx} = 0.$$

$$A = A' e^{x^2 - x} + B',$$

$$y = A' e^{x^2} + B' e^x.$$

I den anden Differentialligning faas til Bestemmelse af A:

$$\frac{d^2A}{dx^2} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{dA}{dx} = 0.$$

$$A = A' \sin x + B',$$

$$y = A' e^x \sin x + B' e^x.$$

II.

En Cykloide er beskreven af et Punkt M af Periferien af en Cirkel, hvis Radins er a, og som ruller paa en ret Linie L.

Find Volumen af et af de (kun ved enkelte Punkter forbundne) Legemer, som begrænses af den Flade, som frembringes ved Cykloidens Omdrejning om L.

Bevis at Indhyllingskurven for Diametren til M i den rullende Cirkel selv er en Cykloide. Hvorledes er den beliggende?

Find Tyngdepunktet af et af de (kun ved enkelte Punkter forbundne) Arealer, som begrænses af de to Cykloider.

Opløsning. Voluminet findes saaledes: Cykloidens Ligninger ere:

$$x = au - a \sin u,$$

$$y = a - a \cos u.$$

$$\text{Vol.} = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos^2 u - 3 \cos u - \cos^3 u)\, du,$$

De ulige Potenser af cos u bortkastes:

$$\text{Vol.} = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos^2 u)\, du,$$

$$\text{Vol.} = 5\pi^2 a^3.$$

Indhyllingskurven findes saaledes: Naar den rullende Cirkel har en vilkaarlig Stilling, kan Diametren til M bestemmes ved Ligningen:

$$Y - a = \cot u\,(X - au) \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

Differentiation m. H. t. u giver:

$$X - au = -\sin . u . \cos u . a, \;\ldots\ldots\; (2)$$

som i Forbindelse med (1) giver:

$$X - a = -a \cos^2 u \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

(2) og (3) omskrives til:

$$X = \frac{a}{2}(2u - \sin 2u),$$

$$Y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2u),$$

som ere de sædvanlige Ligninger for en Cykloide ($\frac{a}{2}$ for a, 2u for u). Den nye Cykloide har en Spids, allevegne hvor den givne har en Spids; desuden har den nye Cykloide en Spids mellem hver to Spidser i den givne. [Geometrisk findes Indhyllingskurven saaledes: I en vilkaarlig Stilling kaldes den rullende Cirkels Røringspunkt med L for C og dens Centrum for D. DM's Røringspunkt med Indhyllingskurven findes, naar man fra det instantane Centrum C fælder en Vinkelret CE ned paa DM. E er da Røringspunktet. Men E ligger paa en

Cirkel over CD = a som Diameter; $\smile$ CE = $\smile$ CA = au. E ligger da paa en Cykloide, som beskrives, naar en Cirkel med Radius $\frac{a}{2}$ ruller paa L saaledes, at det beskrivende Punkt oprindelig befinder sig i en Spids af den givne Cykloide.]

Det omspurgte Tyngdepunkt findes saaledes: Tyngdepunktet maa ligge i Arealets Symmetriaxe; man søger derfor kun Tyngdepunktets Afstand fra L.

Arealet er efter bekjendte Formler

$$3\pi a^2 - \frac{3}{2}\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Det Volumen, som beskrives, naar Arealet drejes om L, er ifølge denne Opgaves første Del

$$5\pi^2 a^3 - 2 \cdot \frac{5}{8}\pi^2 a^3 = \frac{15}{4}\pi^2 a^3.$$

Tyngdepunktets Afstand fra L findes da ved Guldin's Regel at være

$$\eta = \frac{5}{4}a.$$

III.

En Partikel med Masse m er bundet til uden Modstand at bevæge sig paa Overfladen af en uendelig lang, homogen Omdrejningscylinder med Radius R og Tæthed ϱ. Cylindren tiltrækker Partiklen efter den naturlige Tiltrækningslov. Ved Bevægelsens Begyndelse befinder Partiklen sig i et bekjendt Punkt af Overfladen og faar meddelt en i Tangentplanet gjennem Begyndelsesstedet liggende Hastighed v_0, som danner Vinklen γ med Cylindrens Axe.

Find Partiklens Sted til en vilkaarlig Tid, og angiv Partiklens Tryk mod Fladen.

Opløsning. For at bestemme Tiltrækningen benyttes et Koordinatsystem, i hvilket Cylindrens Overflades Ligning er

$$x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Partiklen m tænkes i Begyndelsespunktet. Med Benyttelse af polære Koordinater (r, θ) i XY-Planen kan man skrive Komposanterne efter Axerne af Tiltrækningen saaledes:

$$X = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2R\cos\theta} dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\varrho r^2 \cos\theta \, . \, dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2R\cos\theta} dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\varrho r^2 \sin\theta \, . \, dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2R\cos\theta} dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu\varrho r z dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Integralerne have trods de uendelig store Grænser endelige Værdier (Sturm. Cours' d'analyse I. § 388).

Ved Integrationens Udførelse faar man:

$$X = 2\pi\mu m\varrho R, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Tiltrækningen gaar altsaa i Retning af X-Axen. —

Til Bestemmelse af Bevægelsen benyttes et andet Koordinatsystem, i hvilket Cylinderfladens Ligning er:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Bevægelsens Differentialligninger ere da:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - 2\pi\mu m\varrho x + N \, . \, \frac{x}{R}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - 2\pi\mu m\varrho y + N \, . \, \frac{y}{R}$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

N er Fladens Reaktion. Naar nu Begyndelsesstedet er (R, 0,0) faas ($x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$):

$$\theta = \frac{v_0 \sin\gamma \, . \, t}{R}, \quad z = v_0 \cos\gamma \, . \, t,$$

$$N = 2\pi\mu m\varrho R - \frac{m v_0^2 \sin^2\gamma}{R}.$$

Banen bliver en Skruelinie, hvis Tangenter danne Vinklen γ med Z-Axen. Naar man bemærker, at $\frac{R}{\sin^2\gamma}$ er Krumningsradius i Skruelinien, ses det, hvorledes det for N fundne Udtryk stemmer med en bekjendt Sætning (Jul. Petersen: Dynamik § 27).

Anmeldelser.

Synopris der høheren Mathematatik von Johan G. Hagen.

(Felix Dames, Berlin 1891.)

Dette Værk, der er udarbejdet efter en meget omfattende Plan, kan betragtes som en Encyclopædi over den samlede højere Mathematik. Det er beregnet paa at skulle udgjøre fire Bind, hvoraf det første er udkommet (400 Sider i stort Qvart). Da Pladsen ikke tillader en i Enkeltheder gaaende Anmeldelse, maa det være nok at sige, at dette, der indeholder den arithmetiske og algebraiske Analyse, er delt i følgende tolv Hovedafsnit, hvoraf igjen hvert indeholder en Mængde Underafdelinger.

I. Taltheori. — II. De komplexe Tals Theori. — III. Læren om Kombinationer. — IV. Læren om Rækker. — V. Læren om uendelige Produkter og Fakulteter. — VI. Kjædebrøkernes Theori. — VII. Læren om Differenser og Summer. — VIII. Funktionstheori. — IX. Læren om Determinanter. — X. Invarianttheori. — XI. Substitutionstheori. — XII. Ligningernes Theori.

Bogen giver foruden Nomenklatur og Formler (Sætninger) korte Antydninger om Beviserne eller i hvert Fald Henvisninger til de Kilder, hvor saadanne kunne findes.

Den Begrænsning, Forf. har paalagt sig ved at holde sig til foreliggende Lærebøger som Norm, hvorved altsaa i hvert Fald ikke medtages Tidsskriftsafhandlinger fra det sidste Decennium, er vel begrundet i Sagens Natur; selv paa

den Maade, maa Arbejdet næsten synes at overskride en enkelt Mands Kræfter.

Paa et Tidspunkt som det nærværende, hvor kun de allerfærreste udenfor deres Specialstudium have et fuldt omfattende Kendskab blot til det System af Benævnelser, der bruges i andre Dele af Videnskaben, vil et Arbejde som det foreliggende afhjælpe et føleligt Savn.

De mange tilføjede historiske og bibliografiske Oplysninger gjøre Værket end mere værdifuldt. Udstyrelsen er fortrinlig.

G. Frege, Function und Begriff (H. Pohle, Jena).

Forfatteren af denne Piece gjør opmærksom paa, at der er Forskjel mellem en Funktions Begreb og Funktionen selv. For saa vidt man af den uklare Fremstilling kan sé det, skulde dette særlig være af Interesse i rén logisk Henseende.

Annuaire pour l'an 1892 publiè par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars et fils. 1892 (878 p in 18, med Figurer og to magnetiske Kort; Pris fr. 1.50).

Denne Aargang indeholder som sædvanlig en Række af Artikler og Tabeller, der omfatte Astronomi, Fysik, Kemi, Møntvæsen, Statistik, Geografi, Meteorlogi o. s. v. Dertil er føjet de følgende Noter. Den 3die Sammenkomst af den internationale Comité for fotografisk Udførelse af et Himmelkort af Contreadmiral Moucher. — Om Maanen og dens seculære Acceleration af Tisserand. — Den geodætiske Congres i Florenz, 8de October 1891 af Bouquet de la Grye. Bjergobservatorier, et Observatorium paa Mont-Blanc, af J. Janssen. — Om et Speilapparat ved Observatoriet i Nizza af Cornu. — Taler ved Indvielsen af en Statue af Borda i Dox, 24de Maj 1891, af Bouquet de la Grye og Viceadmiral Paris.

Flere af disse Tilføjelser — saaledes Tisserands om Maanen — have ikke ringe Interesse.

Opgaver til Løsning.

22. Naar F (a, b, c, x) er den almindelige Betegnelse for den hypergeometriske Række, skal man bevise, at

$$F(a, b, b - a + 1, - 1) = \frac{\Gamma(1 + \frac{b}{2}) \Gamma(1 + b - a)}{\Gamma(1 + \frac{b}{2} - a) \Gamma(1 + b)},$$

hvor Rækken paa venstre Side af Lighedstegnet er konvergent for $\Re(a) < 1$, ubetinget konvergent for $\Re(a) < \frac{1}{2}$; b antages vilkaarlig.

(J. L. W. V. Jensen.)

(Math. Tidssk. 1886. Opg. Nr. 533.)

23. P er et Punkt af en Trekants omskrevne Cirkel, H Højdernes Skæringspunkt. Vis, at Projektionerne af P på de 3 Sider og Midtpunktet af PH ligge paa ret Linje (Limsons Linje). — Find derpaa det geometriske Sted for Skæringspunktet mellem saadanne Linjer, naar de staa vinkelret paa hinanden.

(P. Heegaard.)

24. $(x^2 + 2x)^4 + (2x + 1)^4 + 15x^4 = 0.$

(A. S. Bang.)

25. Bevis, at de fire Punktpar, hvori fire Orthogonalcirkler tagne tre og tre skære hinanden, ved sexten forskellige Inversioner kunne transformeres i Hjørnespidserne af to concentriske regulære Tetraedre.

(Dr. J. de Vries.)

26. Til Bestemmelse af et Keglesnit kender man tre af dets Punkter og Krumningscirklen i et af disse. Hvorledes kan Keglesnittet konstrueres.

(A. N. Godefroy.)

Om Konstruktionen af Kurver af 3die og 4de Orden, bestemte ved at skulle gaa gennem henholdsvis 9 og 14 Punkter.

Af Dr. H. Valentiner.

I Aaret 1875 eller 1876 har jeg beskjæftiget mig med Konstruktioner, som de i Titlen nævnte. Disse Undersøgelser vare rent gaaede mig af Minde, da de bleve genkaldte i min Erindring nu i Foraaret 1891 ved en Opfordring til at holde et Foredrag i mathematisk Forening. Omendskjønt nu disse Konstruktioner ikke have stor praktisk Betydning, idet de blive altfor sammensatte, tror jeg dog, at Theorien har en saadan Betydning, at de nok fortjene at offentliggøres, da de tilmed dog blive simplere end man efter det store Antal givne Punkter kunde vente. Tilmed give de dog nogle Oplysninger om, hvorledes man kan anvende Sætninger, der handle om, at givne Betingelser, som en Kurve skal opfylde, medføre andre Betingelser, selv om Kurven ikke er bestemt ved de givne Betingelser.

Algebraisk udsige saadanne Sætninger, at to eller flere sammenhørende Ligninger maa have visse Rødder bestemte ved at de skulle have nogle visse givne Rødder. Saaledes ville to almindelige Ligninger af 3die Grad med to Ubekendte have 9 sammenhørende Løsninger, men af disse Løsninger kunne kun de 8 være vilkaarligt givne, den 9de er da bestemt ved de andre 8. I dette Tilfælde vil det være overordentlig vanskeligt algebraisk at udtrykke den 9de sammenhørende Rod ved de andre 8. Kan man imidlertid konstruere det 9de Skæringspunkt mellem to Kurver af 3die Orden ved Lineal alene, har man herved et Middel til ogsaa algebraisk at udtrykke de omtalte Rødder rationalt ved de andre, idet da de to Rødder kunne findes ved en Række paa hinanden følgende Løsninger af Ligninger af 1ste Grad.

me Maade vil Konstruktionen af de 3 Punkter,

hvori to Kurver af 4de Orden endnu maa gaa, fordi de gaa gjennem 13 givne Punkter, lede til Bestemmelsen, af de 3 sidste sammenhørende Rødder i to almindelige Ligninger af 4de Grad med 2 Ubekendte, naar de øvrige 13 sammenhørende Rødder ere givne.

Her vil dog disse sidste Rødder kun kunne bestemmes ved en Ligning af 3die Grad, hvis Koefficienter ere rationale Funktioner af de givne Rødder.

Af de to her omtalte Opgaver, er Løsningen af den 1ste velbekendt. Den er givet af Chasles: Comptes rendus. Mai 1853, og Opgaven findes senere løst flere Gange.

Den anden tror jeg derimod ikke har været løst før. Dens Løsning giver forskellige interessante Sætninger, af hvilke jeg straks vil fremhæve de vigtigste, der handle om Kurver af 4de Orden, som gaa gennem 11 givne vilkaarlige Punkter.

Først skal jeg give et Par Definitioner. De 11 Punkter kaldes Grundpunkterne.

Lægges en Kurve φ_4, af 4de Orden, gennem Grundpunkterne, er det bekendt, at denne endnu skæres af en anden Kurve ψ_4 gennem Grundpunkterne i 5 Punkter. Lægges et Keglesnit k gennem disse 5 Punkter, vil det endnu skære φ_4 i 3 Punkter, der ere fuldstændige bestemte paa φ_4 ved Grundpunkterne. Disse 3 Punkter kalder jeg for Simpelheds Skyld Restpunkterne paa φ_4 (efter sædvanlig Betegnelse ere de 3 Punkter korresiduale til Grundpunkterne), og en Gruppe af saadanne 3 Punkter en Restpunktgruppe.

En Kurve af n'te Orden betegnes altid i det følgende ved φ_n, ψ_n o. s. v.

Man har da følgende Sætninger:

To vilkaarlige Restpunktgrupper ere saaledes beliggende, at derigennem kan lægges et Keglesnit.

Forbindelseslinierne mellem 2 og 2 Punkter af en vilkaarlig Restpunktgruppe indhylle et Keglesnit.

Forbindelseslinien mellem to Restpunkter p en vilkaarlig φ_4 gennem Grundpunkte

skære φ_4 i 2 Punkter, de særlige Skæringspunkter, der ere saaledes beliggende, at enhver Kurve af 4de Orden, der gaar gennem Grundpunkterne og et af dem, ogsaa maa gaa genem det andet.

Det geometriske Sted for de særlige Skæringspunkter er en Kurve af 7de Orden med Dobbeltpunkter i alle Grundpunkterne.

Skjønt Konstruktionen af en Kurve af 3die Orden, bestemt ved 9 Punkter, er velbekendt, skal jeg dog medtage den her som Indledning til den analoge Konstruktion for Kurver af 4de Orden, idet jeg haaber herved at gøre denne lettere forstaaelig.

Ved Konstruktion forstaas her kun en Methode til at konstruere et ubegrænset Antal Punkter af Kurven.

I. Konstruktion af Kurver af 3die Orden.

1. Naar en Kurve φ_3 gaar gennem 7 faste Punkter, α, vil en anden Kurve ψ_3 gennem α endnu skære φ_3 i 2 Punkter β, hvis Forbindelseslinie l vil gaa gennem et fast Punkt P af φ_3; thi lægges 2 vilkaarlige Kurver ψ_3 og ψ_3' gennem α og kaldes Forbindelseslinierne mellem φ_3's Skæringspunkter, β og β' med henholdsvis ψ_3 og ψ_3', l og l', ville ψ_3 og l' tilsammen udgøre en Kurve af 4de Orden, der gaar gennem alle ψ_3''s Skæringspunkter med φ_3, og altsaa endnu skærer φ_3 i 3 Punkter, der ligge paa en ret Linie. Men da 2 af disse ligge paa l, maa det 3die ogsaa gøre det, og l og l' altsaa gaa gennem det samme Punkt af φ_3.

Dette Punkt kalder jeg Restpunktet, Q, paa φ_3 til Punkterne α.

Ethvert Punkt i Planet kan forøvrigt gjøres til Restpunkt for en Kurve ψ_3 gennem α. Thi gennem α, β og et vilkaarligt Punkt R af l, kan man altid lægge en Kurve af 3die Orden, for hvilken R da er Restpunkt. Da l kan vælges vilkaarlig gennem Q, ses det, at R er et fuldstændig vilkaarligt Punkt 'lanen.

'endt ses en Kurve ψ_3 at være fuldstændig bestemt

ved at skulle gaa gennem α og skulle have et vilkaarligt Punkt R til Restpunkt; thi lægges en ret Linie l gennem Q og R, der endnu skærer φ_3 i de 2 Punkter β, ses det, at 2 saadanne Kurver skulde skære hinanden i α, β og R i Alt 10 Punkter, hvad der er en Umulighed.

2. Det er før omtalt, at et af Skæringspunkterne mellem 2 Kurver af 3die Orden er bestemt ved de 8 andre. Dette sidste Punkt kalder jeg Systempunktet. Dette kan bestemmes ved Hjælp af Lineal. De 8 Punkter kaldes 1, 2, 3, ... 7, 8.

Har nu en Kurve af 3die Orden ψ_3 gennem disse 8 Punkter 8 til Restpunkt, medens de 7 andre svare til den før omtalte Gruppe α, maa enhver anden Kurve χ_3 gennem de 8 Punkter endnu skære ψ_3 i et Punkt der ligger paa Tangenten til ψ_3 i 8. χ_3 vil nemlig skære ψ_3 udenfor Punkterne 1, 2...7 i Punkter, hvis Forbindelseslinie l skal have 8 til 3die Skæringspunkt med ψ_3. l maa da have 2 af sine Skæringspunkter med ψ_3 sammenfaldende i 8 eller røre ψ_3 i dette Punkt. maa da gaa gennem Systempunktet. Det kommer da kun an paa at konstruere l, idet denne Linie gaar gennem Systempunktet, og en lignende Linie gennem et af de andre givne Punkter altsaa bestemmer dette.

3. Vi lægge nu gennem (1, 2, 3, 4, 5) et Keglesnit k og gennem (67) en ret Linie l, og ligeledes gennem (12346) og (57) henholdsvis et Keglesnit k_1 og en ret Linie l_1. k og l ligesom k_1 og l_1 udgøre da 2 Kurver af 3die Orden χ_3 og χ_3'. De 2 Skæringspunkter, hvori χ_3 og χ_3' skære hinanden udenfor (1, 2, 3, ... 67) ere Skæringspunkterne mellem l og k_1 og l_1 og k, der kunne bestemmes lineært. En ret Linie gennem de 2 saaledes bestemte Punkter, ville endnu skære k og k_1 i Punkter R og R_1 der henholdsvis er χ_3's og χ_3''s Restpunkt m. H. t. 1, 2 ... 7. Idet ψ_3 har den samme Betydning som 2, vil endelig en ret Linie gennem 8 og R skære l og k i Punkter, der ligge paa ψ_3, idet Skæringspunkterne for ψ_3 og χ_3 skal ligge paa en ret Linie, der forbinder disse Kurvers Restpunkter i en ret Linie, der forbinder Punkterne 6

7, 2 vilkaarlige Punkter mellem de givne, og vi kunne altsaa nu konstruere det 3die Skæringspunkt mellem en Linie, der forbinder 2 af de givne Punkter 1, 2 . . . 7, og ψ_3.

Men da kan man ogsaa konstruere det 3die Skæringspunkt mellem ψ_3 og en Linie der forbinder 8 med ethvert af Punkterne 1, 2 . . . 7.

Thi ligesom vi før saa, at en vilkaarlig Kurve af 3die Orden, der gaar gennem 7 faste Punkter af en φ_3, endnu skærer denne i 2 bevægelige Punkter, hvis Forbindelseslinie gaar gennem et fast Punkt af φ_3, kunne vi ogsaa vise, at et Keglesnit, der gaar gennem 4 faste Punkter af φ_3, endnu skærer φ_3 i 2 bevægelige Punkter, hvis Forbindelseslinie gaar gennem et fast Punkt af φ_3.

Betegne vi nu en ret Linie der forhindrer 2 Punkter A og B ved (AB), kan man konstruere Skæringspunktet mellem ψ_3 og henholdsvis (12) (34) (23) (14). Kaldes disse 4 Punkter x, y, z, u ville (xy) og (zu) skære hinanden i det faste Punkt v af ψ_3, hvorigennem den Linie vil gaa, der forbinder de 2 øvrige Skæringspunkter mellem ψ_3 og et vilkaarligt Keglesnit gennem 1, 2, 3, 4. Linien (8v) skærer da ψ_3 i det samme Punkt, hvori (8v) skærer et Keglesnit gennem 12348, et Punkt, der kan konstrueres lineært. Ganske paa samme Maade ses det, at f. Eks. (81) skærer ψ_3 i det samme Punkt som et Kegsnit gennem yvz38. Konstrueres nu Skæringspunkterne a og b mellem ψ_3 og henholdsvis Linierne (81) og (82), saa udgør (81) og (82) tilsammen et Keglesnit, som skærer φ_3 i 2 i 8 sammenfalder de Punkter, saa at derfor Tangenten til ψ_3 i 8 endnu vil skære ψ_3 i det Punkt P, gennem hvilket den Linie gaar, der forbinder Skæringspunkterne mellem ψ_3 og et vilkaarligt Keglesnit gennem 1 2 a b. Konstrueres derfor endnu Skæringspunkterne c og d mellem henholdsvis (1b), (2a) og φ_3, vil (cd) gaa gennem P. Konstrueres da en Linie til analog med (cd) er P bestemt.

4. Skal man nu konstruere en Kurve af φ_3 gennem 9 givne vilkaarlige Punkter, sker det ved stadigt mellem disse 9

Punkter at vælge 8 Punkter og konstruere Systempunktet hertil, og dernæst anvende samme Fremgangsmaade paa de givne og efterhaanden fundne Punkter.

Opgaven simplificeres meget, naar de givne Punkter ligge i specielle Stillinger; f. Eks. saaledes, at man gennem 8 af dem kan lægge 2 Systemer af 3 rette Linier.

II. Konstruktion af Kurver af 4de Orden bestemte ved 14 givne Punkter.

1. Som Indledning til den omtalte Konstruktion skal bemærkes følgende kendte Sætninger.

Naar en Kurve af m'te Orden φ_m ($m \geqq 2$) skærer en Kurve af 4de Orden φ_4 i $4m - 3$ Punkter, der ikke ligge saaledes, at φ_m gaar gennem nogle af disse Punkter, fordi den gaar gennem de øvrige, er dens øvrige 3 Skæringspunkter med φ_4 bestemte herved.

Naar en Kurve φ_m ($m \geqq 2$) gaar gennem $4m - 5$ faste Punkter paa en φ_4, vil et Keglesnit gennem de øvrige 5 Skæringspunkter mellem φ_4 og φ_m, naar ikke 4 af dem ligge paa en ret Linie, gaa gennem 3 faste Punkter af φ_4.

Skulde 4 af de omtalte Punkter ligge paa en ret Linie, maa de $4m - 5$ først omtalte Punkter ligge paa en Kurve af $(m - 1)$te Orden. Ligge de altsaa ikke paa en saadan Kurve ere de sidst omtalte 3 Punkter fuldstændig bestemt ved de første $4m - 5$ Punkter.

Omvendt vil ethvert Keglesnit gennem de 3 faste Punkter skære φ_4 i 5 Punkter, hvorigennem der kan lægges en φ_m, der gaar gennem de førstnævnte $4m - 5$ Punkter.

Beviserne for disse Sætninger ere analoge med det p 35 førte. Se forøvrigt: Salmons Higher plane curves chap II.; eller: Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über die Geometrie p. 425 o. f.

2. To Kurver af 4de Orden skære hinanden i 16 Punkter. Ere 11 Punkter givne og lægges gennem dem en fast Kurve φ_4, vil en bevægelig Kurve af 4de Orden gennem de 11 Punk-

ter endnu skære φ_4 i 5 Punkter, hvorigennem der kan lægges et Keglesnit k. k skærer endnu φ_4 i 3 Punkter, Restpunkterne paa φ_4 m. H. t. de faste Punkter. Idet de 11 Punkter antages at være fast givne Punkter, ville de tre sidstnævnte Punkter simpelthen kaldes Restpunkterne, og hvor ikke andet nævnes, forudsættes altid alle Kurver af 4de Orden at gaa gennem de 11 faste Punkter. En Gruppe af 3 Restpunkter paa en φ_4 kaldes en Restpunktgruppe.

Det ses da umiddelbart, at to Restpunktgrupper altid ligge paa samme Keglesnit. 3 Restpunkter af samme Restpunktgruppe kunne ikke ligge paa samme rette Linie, med mindre de 11 Punkter ligge paa en Kurve af 3die Orden, hvad der i denne Afhandling antages ikke at finde Sted.

Vi ville nu først undersøge, hvor mange Restpunkter, hørende til samme Restpunktgruppe, vi kunne vælge vilkaarligt.

Vi kunne da først paavise, at et saadant Punkt kan vælges fuldstændig vilkaarligt. Lad os nemlig antage at α er Restpunktgruppen paa φ_4, saa kan man lægge et Keglesnit gennem α og et vilkaarligt Punkt Q. Dette Keglesnit vil da skære φ_4 i 5 Punkter, som tilligemed de givne 11 Punkter danner et fuldstændigt Skæringspunktsystem mellem φ_4 og en anden Kurve ψ_4.

Men ψ_4 er ikke fuldstændig bestemt herved; men kan endnu bringes til at opfylde en Betingelse til. Man kan da lægge ψ_4 gennem Q, som saa bliver Restpunkt paa ψ_4. ψ_4 er da fuldstændig bestemt ved at skulle have et Restpunkt i et vilkaarligt Punkt Q og sine andre Restpunkter beliggende paa et givet Keglesnit gennem Q og α. Men da Keglesnittet ikke er fuldstændig bestemt ved at skulle gaa gennem Q og α, vil den Restpunktgruppe hvortil Q hører ikke være fuldstændig bestemt ved Q alene. Man kan altsaa have uendelig mange Kurver af 4de Orden, der have et fælles Restpunkt Q.

Lad os nu antage at to Kurver ψ_4 og χ_4 have et fælles Restpunkt Q, saa skal et Keglesnit der gaar gennem Restpunktgrupperne β og γ af henholdsvis ψ_4 og χ_4 gaa

gennem hvilken et med Q sammenhørende Punkt paa hver af Kurverne, idet at dette Punkt er fælles for c_4 og c_6. Dette er kun muligt, naar Keglesnittet har et Dobbeltpunkt i Q, eller bestaar af to rette Linier der skære hinanden i Q. Igennem hvert Punkt af Planen Q gaar der altsaa to rette Linier, der er det geometriske Sted for Restpunkterne i alle de Restpunktgrupper hvortil Q hører. Vi kalde disse Linier Restpunktlinierne.

Det ses da let, at to vilkaarlige Punkter af en Restpunktlinie L kunne vælges til Restpunkter for en Kurve c_4. At et Punkt kan det, er allerede omtalt. Lad dette være Q. De øvrige Punkter i Restpunktgruppen ere da bestemte ved at skulle ligge paa et vilkaarligt Keglesnit gennem Q og a, og da dette endnu kan lægges gennem et vilkaarligt Punkt R af L, ses R at kunne vælges til et andet med Q sammenhørende Restpunkt, og at den Restpunktgruppe hvortil Q og R hører herved er fuldstændigt bestemt.

Da der gennem hvert Punkt af Planen kan lægges to Restpunktlinier, indhylle disse et Keglesnit.

Vi ere da komne til følgende Resultater:

1. To Restpunktgrupper ligge altid paa samme Keglesnit.

2. Ethvert Punkt i Planet kan tages til Restpunkt.

3. Det geometriske Sted for de Punkter som sammen med et givet Punkt Q danne en Restpunktgruppe er to rette Linier der skære hinanden i Q, Restpunktlinierne. Disse indhylle et Keglesnit.

4. Paa enhver Restpunktlinie kunne to vilkaarlige Punkter tages til Restpunkter.

Sætning 3, kan ogsaa udtales saaledes: Det geometriske Sted for Forbindelseslinierne mellem to Restpunkter af samme Restpunktgruppe er et Keglesnit.

Sætningerne 1 og 3 give i Forbindelse med hinanden, da

det let ses, at to Grupper af 3 vilkaarlige Punkter af et vilkaarligt givet Keglesnit kunne vælges til Restpunktgrupper for to Kurver af 4de Orden *), idet hver af disse lægges gennem sin Gruppe af 3 Punkter, og de desuden begge lægges gennem de samme 5 forøvrigt vilkaarligt valgte Punkter af Keglesnittet, den bekjendte Sætning:

Naar to Trekanter have deres Vinkelspidser paa samme Keglesnit ville deres Sider røre et andet Keglesnit,

en Sætning, der kan udsiges under den maaske mere bekjendte Form:

Naar en Trekant er indskrevet i et Keglesnit og omskrevet om et andet, kan man tegne uendelig mange Keglesnit, der ere indskrevne i det første Keglesnit og omskrevne om det andet.

Gaar en Kurve af 4de Orden gennem 11 faste Punkter, vil der paa enhver saadan Kurve findes nogle Punktpar af den Beskaffenhed, at enhver Kurve af 4de Orden, der gaar gennem de 11 Punkter og et Punkt af et saadant Punktpar ogsaa maa gaa gennem det andet. Vi ville kalde et saadant Punktpar et særegent Punktpar, og skulle nu søge at bestemme dem. Da enhver Kurve ψ_4, der gaar gennem et Punkt af et særegent Punktpar paa en φ_4 ogsaa maa gaa gennem det andet, kan ψ_4 foruden at gaa gennem Punktparret endnu lægges gennem et vilkaarligt Punkt af φ_4. Det samme maa da være Tilfældet med et Keglesnit gennem Restpunkterne paa φ_4 og Punktparret (da man gennem Restpunkterne og ψ_4's Skæringspunkter med φ_4 skal kunne lægge et Keglesnit). Det er altsaa kun 4 Betingelser for Keglesnittet at gaa gennem de 3 Restpunkter og det særlige Punktpar, (i Alt 5 Punkter); men dette er kun muligt, naar 4 af disse 5 Punkter ligge i en ret Linie, eller et særegent Punktpar dannes af de 2 Punkter, hvori en ret Linie gennem 2 af Restpunkterne paa φ_4 endnu skære φ_4. At saa-

*) Naturligvis under Forudsætning af at de 11 faste Punkter ikke ere givne.

danne 2 Punkter virkeligt danne et særegent Punktpar, ses af, at et Keglesnit gennem Restpunkterne og et saadant Punktpar opløser sig i 2 rette Linier, hvoraf den ene indeholder 2 Restpnnkter og Punktparret, medens den anden kan være en vilkaarlig ret Linie gennem det 3die Restpunkt og altsaa kan lægges gennem et vilkaarligt Punkt af φ_4.

Vi se da, at der paa enhver Kurve φ_4 gennem de 11. Punkter findes 3 særegne Punktpar.

. Alle Kurver af 4de Orden, der have et fælles Restpukt danne et Bundt; idet de foruden i Restpunktet endnu skære hinanden i de særegne Punktpar, hvori Restpunktlinierne gennem Q skære en af dem.

Vi ville nu bestemme det geometriske Sted for de særegne Punktpar.

Ordnen n af dette geometriske Sted, χ, er bestemt ved det Antal Punkter, hvori en vilkaarlig ret Linie skærer det.

Nu kan man lade en Kurve ψ_4 gaa gennem et vilkaarligt særegent Punktpar og have et vilkaarligt givet Punkt i Planen til Restpunkt. Vi antage, at dette er Q, og ville nu søge i hvor mange Tilfælde en ψ_4, der har Q til Restpunkt, kan have et Punkt af sine særegne Punktpar liggende paa en given vilkaarlig Linie L. Har ψ_4 Q til Restpunkt, vil dens 2 andre Restpunkter komme til at ligge paa de 2 ved Q bestemte Restpunktlinier L_1 og L_2. Vi kunne nu lægge en ψ_4 gennem et vilkaarligt Punkt X af L, saa er ψ_4 fuldstændig bestemt herved og altsaa ogsaa den Linie, L_3, der forbinde de 2 Restpunkter, som ikke falde i Q. L_3 skærer L i et Punkt Y, saa at til hvert X svarer et Punkt Y. Omvendt gaar gennem hvert Punkt Y 2 Restpunktlinier, og der findes 2 Kurver af 4de Orden, der har en af disse Linier til 3die Restpunktlinie. Hver af disse Kurver skærer L i 4 Punkter, saa at til hvert Y svarer 8 Punkter X. Der er da 9 Punkter af L i hvilke et Punkt X falder sammen med et tilsvarende Punkt Y, og de søgte Punkter ville være saadanne Sammenfaldspunkter, der falde udenfor

Linierne L_1 og L_2. Men i hvert af L's Skæringspunkter med L_1 og L_2 falder et Sammenfaldspunkt. Der er da udenfor L_1 og L_2 7 Sammenfaldspunkter, saa at man faar $n = 7$. Det er ikke vanskeligt at overbevise sig om, at dette Tal virkeligt er det rette, eller at i hvert Sammenfaldspunkt virkeligt kun 1 X falder sammen med 1 tilsvarende Y; men her skal ikke anstilles nogen Undersøgelse herover idet det er tilstrækkeligt at vide at n ikke kan være større end 7. Thi da X maa skære enhver Kurve φ_4 gennem de 11 Punkter i 6 Punkter udenfor de givne 11 Punkter, saa har man, naar X har et p dobbelt Punkt i hvert af disse 11 Punkter

$$4n = 6 + 11p,$$

hvor n og p ere hele Tal; thi ligge de 11 Punkter fuldstændig vilkaarligt, maa χ, naar den har et p-dobbelt Punkt i et af disse Punkter, have et p-dobbelt Punkt i hvert af dem. Men af denne Ligning faas

$$n = 7 + 11q$$
$$p = 2 + 4q,$$

saa at den mindst mulige Værdi af n er 7, hvortil svarer $p = 2$. χ har altsaa et dobbelt Punkt i hvert af de givne 11 Punkter. Dette kan ogsaa let eftervises; thi fra hvert af de 11 Punkter kan der trækkes 2 Tangenter til det Keglesnit som er Indhyllingskurve for Restpunktlinierne. Enhver Kurve ψ_4, der har sine Restpunkter paa en saadan Tangent maa røre χ i det givne Punkt, Tangenten udgaar fra, saa at Tangenten til ψ_4 ogsaa er Tangent til χ. Til hver af de 2 Tangenter til Keglesnittet svarer saaledes en Tangent til χ, derimod falder i Almindelighed ikke Tangenten til Keglesnittet i en Tangent til χ.

Kurven χ er altsaa af 7de Orden og har 11 Dobbeltpunkter. Den er tillige saaledes beskaffen, at til hvert Punkt af den, svarer 1 Punkt af et bestemt Keglesnit, Indhyllingskurven for Restpunktlinierne, medens der til hvert Punkt af af Keglesnittet svarer 2 Punkter af χ.

Kurven χ maa røre det omtalte Keglesnit i alle de Punkter, som disse Kurver have fælles.

Thi er Q et saadant Punkt og trækker man fra et Punkt P paa χ i Nærheden af Q Tangenter til Keglesnittet, maa hver af dem indeholde et særegent Punktpar. Det ene Punktpar har P som sit ene Punkt. Det andet Punktpar maa være saaledes beliggende, at det, ved at P nærmer sig til Q, nærmer sig til at falde sammen med det Punktpar, hvortil P hører, da ellers Tangenten til Keglesnittet i Q maa komme til at indeholde to særegne Punktpar, hvad der er en Umulighed; men da maa altsaa den anden Tangent fra P til Keglesnittet skære χ i et Punkt, der, naar P nærmer sig til Q, nærmer sig til at falde sammen med P, eller Tangenten til Keglesnittet i Q maa ogsaa være Tangent til χ.

5. Vi skulle nu bestemme det 11 Punkter tilhørende Keglesnit k.

Dette kan ske ved at konstruere Restpunkterne for opløselige Kurver af 4de Orden gennem de 11 Punkter bestaaende af en ret Linie og en Kurve af 3die Orden.

Man kan saaledes (idet vi betegne de givne Punkter ved Tallene fra 1 til 11) lægge en Kurve af 3die Orden φ_3 gennem Punkterne 1, 2...9 og en ret Linie l_1 gennem 10 og 11. Man kan nu ved Lineal, Passer og et fast Keglesnit bestemme Restpunkterne paa denne sammensatte Kurve. Man kan nemlig lægge en ny sammensat Kurve gennem de 11 Punkter, bestaaende af en Kurve ψ_3 gjennem 1, 2...8 10 og en ret Linie l_2 gennem 9 og 11, og ved Hjælp af Passer og Lineal bestemme Skæringspunkterne mellem de omtalte sammensatte Kurver.

Disse Skæringspunkter ville være, det 9de Skæringspunkt mellem φ_3 og ψ_3, der bestemmes ifølge det foregaaende, og Skæringspunkterne mellem henholdsvis l_1 og φ_2, l_2 og φ_1. Ved de sidste Punkters Bestemmelse, kommer det da an paa at konstruere Skæringspunkterne mellem en Kurve φ_3, bestemt ved at skulle gaa gennem 9 givne Punkter, og en ret Linie l_3 gennem et af de givne Punkter.

Punkterne 1 2 3 9 danne en Firkant, hvis Siders Skæringspunkter med φ_3 vi ville bestemme. Dette kan ske ved Lineal og Passer. Denne Opgaves Løsning henføres let til den Opgave vi have løst, for en Kurve af 3die Orden at bestemme Systempunktet til 8 givne Punkter. For at bestemme Skæringspunktet med 12, kan man bestemme Systempunktet S til 1, 2, 3 ... 7, 8 og ligeledes Systempunktet S', til 3, 4 ... 8, 9 S. Da ville Linierne 12 og 9 S' skære hinanden i et Punkt af φ_3, nemlig i Restpunktet til 3, 4, 5, 6, 7, 8 S og vi have saaledes bestemt Skæringspunktet mellem φ_3 og den rette Linie 12.

Paa denne Maade kan altsaa bestemmes Skæringspunkterne α, β, γ, δ mellem φ_3 og henholdsvis de rette Linier 91, 12, 23 og 39. Linierne $\alpha\gamma$ og $\beta\delta$ ville da endnu skære hinanden i et Punkt Σ af φ_3, og ethvert Keglesnit k_1 gennem 2, β, Σ, γ vil endnu skære φ_1 i 2 Punkter, hvis Forbindelseslinie gaar gennem 9. Paa samme Maade kan man konstruere 4 nye Punkter (f. Eks. ved 9 1 2 4) saaledes at ogsaa Forbindelseslinien mellem de to Punkter, hvori et saadant Keglesnit k_2 skærer φ_3, gaar gennem 9. Lægges nu gennem et vilkaarligt Punkt P af l et Keglesnit k_1 og et k_2, ville disse endnu skære l_2 i 2 Punkter X og Y, der kunne bestemmes lineært. Bevæger P sig danne XY to homographiske Punktrækker paa l_2, hvis Fællespunkter ere φ_3's Skæringspunkter med l_2; men disse Fællespunkter kunne bestemmes ved Passer og Lineal.

Man kan da ved Passer og Lineal bestemme Skæringspunkterne mellem de to sammensatte Kurver $\varphi_3 l_1$ og $\psi_3 l_2$, der begge gaa gennem 1, 2, 3 ... 11. Har man gjort dette, skal man bestemme Restpunkterne paa dem. Men idet disse sammensatte Kurver skære hinanden (udenfor de 11 givne Punkter), i tre Punkter der ligge paa φ_3, to der ligge paa l_1, beror Løsningen af denne Opgave paa at konstruere de 3 Punkter, hvori et Keglesnit, der gaar gennem 3 Punkter af φ_3, 2 udenfor φ_3, endnu skærer φ_3.

Lægge vi nu et Keglesnit k gennem 4 givne Punkter af ...nne vi paa lignende Maade som før bestemme dets

øvrige Skæringspunkter med φ_3. Vi bestemme da først det Punkt P, hvori Forbindelseslinien mellem Keglesnittets 2 øvrige Skæringspunkter med φ_3 skærer φ_3. Vi kunne dernæst tænke os k bestemt ved at vi kende dets Tangent t i et af de givne 4 Punkter Q. En ret Linie l gennem P vil nu skære φ_3 i 2 Punkter, som vi kunne konstruere. Disse ville ligge paa et Keglesnit k_1 gennem de givne 4 Punkter. Vi kunne da konstruere k_1's Tangent i Q t_1. t_1 og l bestemme da 2 homografiske Liniebundter, og man kan da lineært konstruere, hvilken Stilling af l, der svarer til t, og altsaa ved Hjælp af Lineal og Passer k's Skæringspunkter med φ_3.

Vi komme nu endelig til at bestemme Skæringen mellem φ_3 og et Keglesnit K, der gaar gennem 2 givne Punkter udenfor φ_3, 3 Punkter af φ_3. Vi lægge da gennem de 3 givne Punkter og endnu et vilkaarligt valgt Punkt af φ_3 et Keglesnit k. k vil endnu skære φ_3 i 2 Punkter, hvis Forbindelseslinie X vil gaa gennem et Punkt P af φ_3. k vil skære K i et Punkt Q. Q forbindes med P, og Forbindelseslinien kaldes Y. Tænkes k bevægeligt, vil der til hver Linie X svare en Linie Y, medens der til hver Linie Y svarer 2 Linier X, saa at der findes 3 Linier X der falde sammen med de tilsvarende Y. Men dette finder kun Sted naar Y gaar gennem et af K's Skæringspunkter med φ_3.

Nu kunne til hinanden svarende X og Y konstrueres i vilkaarligt Antal ved Lineal og Passer. Der staar altsaa kun tilbage at konstruere de sammenfaldende X og Y, en Opgave, der kan løses ved Lineal, Passer og et fastliggende tegnet Keglesnit. Men herved er da vist, hvorledes man ved Passer, Lineal og et fastliggende Keglesnit kan konstruere Restpunkterne paa de omtalte opløselige Kurver, hvorved da det omtalte Keglesnit, der hører til de 11 Punkter, er fuldstændig bestemt,

6. Vi ville nu søge at løse følgende Opgave. Man har givet 11 Punkter af en Kurve af 4de Orden φ_4, 1 af dens Restpunkter P til de 11 Punkter, og endnu et 12te Punkt C

hvorigennem φ_4 skal gaa: Hvorledes bestemmes φ_4's 2 andre Restpunkter?

Man begynder da med at konstruere Restpunktlinierne gennem P og Q.

Ere P_1 og P_2 de med P sammenhørende Restpunkter for φ_4, vil et Keglesnit k gennem P, P_1, P_2 og Q skære Restpunktlinierne gennem Q i 2 med Q sammenhørende Restpunkter Q_1 og Q_2.

Den Kurve ψ_4, der har Q Q_1 Q_2 til Restpunkter, vil røre k i Q; thi k skal i Q baade gaa gennem et af ψ_4's Skæringspunkter med φ_4 og et Restpunkt af ψ_4. Kaldes Tangenten til k i Q l, vil omvendt ethvert Keglesnit k' gennem Q, Q_1, Q_2, der rører l og gaar gennem et vilkaarligt Punkt P', skære Restpunktlinierne gennem P' i Punkter P_1' og P_2', der sammen med P', danne en Restpunktgruppe for en Kurve φ_4' som gaar gennem Q. Lægges altsaa en Række Keglesnit k, k_1, k_2..., der indeholde forskellige Restpunktgrupper (Q, Q_1, Q_2), (Q, Q_1', Q_2'), (Q_1, Q_1'', Q_2'')... og som i Q røre de tilsvarende Kurver ψ_4, ψ_4', ψ_4''... og ere Tangenterne til k, k_1, k_2... i Q l, l_1, l_2..., ville Keglesnit gennem (Q, Q_1, Q_2), (Q, Q_1', Q_2'), (Q, Q_1'', Q_2'')... der røre Linierne l, l_1, l_2... og gaa gennem et Punkt P' alle skære Restpunktlinierne gennem P' i de samme Punkter.

Herpaa beror Løsningen af Opgaven. Man lægger gennem P og 2 til P svarende Restpunkter P' og P'', hvoraf det ene kan vælges vilkaarligt, et Keglesnit, der i Q rører en vilkaarlig gennem Q gaaende Linie l_1 og skærer Restpunktlinierne gennem Q i Punkterne Q' og Q''. Dernæst lægger man gennem Q Q' Q'' et Keglesnit, der rører l_1 og gaar gennem et vilkaarligt valgt fast Punkt R, hvis Restpunktlinier det skærer i R' og R''. Dernæst lægger man gennem R, R' og R'' et nyt Keglesnit, der rører en ny ret Linie l_2 gennem Q, og skærer Restpunktlinierne gennem Q i Q_1' og Q_1''. Endelig lægger man gennem Q, Q_1' og Q_1'' et Keglesnit, der rører l_2 og gaar gennem P. Dette skærer Restpunktlinierne gjennem P i P_1' og P_1''. Be-

tragtes nu P' og P_1' som til hinanden svarende Punkter, vil der til hvert Punkt P' svare 1 Punkt P_1' og omvendt.

P_1 vil da være et af de Punkter hvori P' falder sammen med P_1'. Men der er 2 Punkter, i hvilke P' falder sammen med P_1'. For da ikke at bringe nogen Ubestemthed ind i Opgaven, kan man vælge R paa samme Restpunktlinie som P_1. R vil da være et af Sammenfaldspunkterne, det andet er da P_1.

Ved denne Konstruktion kan man endelig naa at kunne konstruere de tre Punkter, hvori alle Kurver, der gaa gennem 13 givne Punkter, skære hinanden. Man vælger da 11 af disse Punkter og konstruerer Restpunktgrupperne m. H. t. de valgte Punkter for de 2 Kurver, der have hver sit af de to sidste Punkter til Restpunkt og gaar gennem det andet. Et Keglesnit gennem disse 2 Punktgrupper vil da gaa gennem de 3 søgte Punkter. Konstruerer man et saadant Keglesnit til idet man ombytter et af de 2 sidste Punkter med et af de andre, faas endnu et Keglesnit til der gaar gennem de søgte Punkter. Disse ere saaledes bestemte ved Skæring mellem 2 Keglesnit, hvis ene Skæringspunkt man kender.

Det ses, at alle Konstruktioner kunne gennemføres ved Passer, Lineal og et fast Keglesnit.

Man kan da, naar man har 14 Punkter af en φ_4 konstruere lige saa mange Punkter af den, som man vil, idet man stadigt anvender den omtalte Konstruktion paa 13 Punkter.

Anmeldelser.

Émile Picard, Traité d'Analyse I.

Paris, Gauthier-Villars 1891.

Det er den berømte Forfatters Hensigt i denne Bog at fremstille Læren om Differentialligninger og de dertil knytte Omraader af Analysen, saaledes Læren om de 2

Funktioner. Det foreliggende første Bind behandler imidlertid kun de forholdsvis mere elementære Dele, om der endogsaa her allerede findes videregaaende Undersøgelser.

Det første Afsnit giver det elementære Grundlag for Læren om Integraler med reelle Variable medindbefattende krumliniede Integraler og Overfladeintegraler.

Som Eksempel paa Anvendelsen af denne Lære begynder det andet Afsnit med en Behandling af Potentialet ved Hjælp af dets definerende Differentialligning, nærmest efter H. A. Schwarz og C. Neumann. Desuden findes her Læren om Rækker, hvor særlig de trigonometriske ere udførlig behandlede, saaledes at ogsaa Cantors almindelige Sætning medtages.

Det sidste Afsnit medtager geometriske Anvendelser af Infinitesimalregningen af meget forskellig Art.

Som man af denne meget kortfattede Indholdsfortegnelse kan se, bevæger Forf. sig paa et omfattende og mangesidigt Omraade. Maaske er denne Variation, der ikke giver Læseren Tid til at trættes, noget Skyld i, at den foreliggende Bog er og maa være saa interessant for enhver Mathematiker. Men væsentligt beror dette dog paa den overalt klare og gennemsigtige Fremstilling, der ved at holde sig til sikkert tilstrækkelige Gyldighedsbetingelser uden al Tyngde behandler Genstandene paa en i det Hele eksakt Maade.

De fra Forf. selv hidrørende originale Undersøgelser findes i dette Bind vel mest i Læren om multiple Rækker og om konforme Afbildninger.

Udstyrelsen er fortrinlig.

E. Pietzker, Die Gestaltung des Raumes.

(Braunschweig, Otto Salle 1891.)

Forfatterens aabent udtalte Hensigt med denne Bog er ligefrem at vise alle dem, der overhovedet ville lade sig overwise, at den Ikke-Euclidiske Geometri i og for sig er en

kan sige, at han ud fra sit Standpunkt

(om end ikke overalt ganske konsekvent) angriber denne moderne Theori ganske godt. Der er nemlig ved hele dette Spørgsmaal en ganske særlig Omstændighed, som bevirker, at man ikke her som i næsten alle andre mathematiske Undersøgelser maa forkaste den ene af to indbyrdes modstridende Opfattelser. Det vil derfor maaske ikke anses for helt overflødigt til vor Anmeldelse af ovennævnte Bog at knytte en lidt almindeligere Redegørelse af det geometriske Problem om Rummets Natur.

Det vil her vise sig, at den Antagelse man vil slaa sig til Ro med, er afhængig af den i og for sig rent filosofiske Grundopfattelse, hvormed man begynder. De to Opfattelser, der staa overfor hinanden, ere naturligvis de to gamle: den empiriske og den idealistiske (som vi ville kalde dem). Forsaavidt Forskellen mellem disse paa dette Sted interesserer os, kan man bestemme den derhen, at den første hævder, at al vor Viden om Yderverdenen i strikteste Forstand alene erhverves ved Erfaringen, den anden, at hele vort Væsen paanøder os de Grundsandheder, vi derved komme i Besiddelse af. Nu kan det vistnok ikke nægtes, at i hvert Fald mange Ikke-Filosofer ved at gennemse herom førte Kontroverser ville faa et Indtryk af, at hele Striden egentlig ikke er saameget værd. Hvormeget end Forsvarerne af »idæe innatae« hævde deres Synspunkt, maa de jo dog indrømme, at den bestemte Kendsgerning (f. Eks. at en ret Linie er bestemt ved to af dens Punkter) kun kommer fuldt under ens Herredømme, derved at Erfaringen saa at sige løser den bundne Tanke; omvendt maa de rene Erfaringsmænd indrømme, at Geometrien egentlig ikke handler om selve Naturens rette og krumme Linier men om Abstraktioner fra disse. Nu forekommer det mig, at det ogsaa i rent filosofisk Henseende ikke er uden Interesse, at det er en Specialvidenskab, Mathematiken, der ved en logisk gennemført Tankerække paa i hvert Fald et væsentligt Punkt har vist de forskellige Konsekvenser, hvortil man ved de to Synspunkter føres. At en saadan Forskel overhovedet kan komme, beror i det væsentlige paa den Særegenhed

Erfaring og al vor Experimenteren er belemret med en Usikkerhed eller rettere sagt med en Unøjagtighed, som paa ingensomhelst Maade kan undgaas eller uden Hypothese skydes tilside. Denne Hypothese — eller hvad man vil kalde den — er det nu Idealisten tilføjer, idet han hævder, at disse i hvert Fald ikke fuldt ud nøjagtige Maalinger, eller hvad andet det er, man erfarer, umiddelbart aabner Øiet for et overalt og paa enhver Tid gyldig i Sagens Natur bundende Forhold, som man saa maa bygge videre paa.

For saa vidt nu Paastanden som f. Eks. den, at der eksisterer en vis ret Linie, der kan forskydes i sig selv og kan drejes om sig selv uden at skifte Plads, nu holder sig indenfor det Omraade, hvor nu overhovedet direkte Erfaring er mulig, har Empirikeren intet at indvende herimod. At dette skal være mere end en blot Talemaade, ses maaske bedst deraf, at Empirikeren (indenfor alt mulig virkelig for Erfaringen tilgængelig Rum) aldeles ikke har mere Grund til at tvivle om Parallelaxiomet *) end f. Eks. om, at en ret Linie er bestemt ved to af dens Punkter.

Men Sagen kommer til at se helt anderledes ud, naar vi overskride de Grænser, vor Erfaring giver — naar vi tænke paa Figurdele, der komme til at ligge udover alle de Grænser, som nogen direkte Erfaring kan omfatte. Det er her af den allerstørste Vigtighed at erindre, at saadanne Figurdele maa der i Geometrien siges noget om, det kan i den allersimpleste Konstruktion hændes, at et eller andet af de Punkter, man skal bruge ved følgende Skridt, kommer udenfor et nok saa stort Papir. Det er denne Egenskab ved de geometriske Konstruktioner, der fører Mathematikeren til den Præcisering af de to Standpunkter (hvad de her betragtede Spørgsmaal angaar), at den idealistiske Opfattelse kræver, at de sædvanlige Sætninger om Sammenhængen mellem vore Rumelementer

*) Alle de forskellige Former, man har givet dette Axiom, ere væsentligt [illegible]ældende. Man kan paa dette Sted tænke sig det udtalt paa en vil[illegible] de autor[illegible]ader.

[illegible] Erfaring, [illegible] at [illegible] langt [illegible] Objekter [illegible] Rum. [illegible] vil- [illegible] som [illegible] at de [illegible] der [illegible] egentlige [illegible] egentlige [illegible]

[illegible] samme [illegible] og et [illegible] gennem [illegible] naar ikke er [illegible] udtrykke [illegible] have et [illegible] føres gennem [illegible] Rummet liggende egentlige [illegible] at mærke [illegible] Rummet [illegible] ved [illegible]

[illegible] erfarings- [illegible] selv [illegible] Men

[illegible] nelem [illegible] og Skæringspunktet [illegible] hinanden [illegible] Papiret [illegible] findes i de [illegible] Eks. [illegible] Cremona, [illegible]

nu gælde de samme Sætninger for de uegentlige Elementer med samme Grad af Nøjagtighed som for de egentlige. Der er derfor for Empirikeren ikke nogensomhelt Grund til ikke at fastholde disse Sætningers Antagelse. Hele hans Standpunkt tvinger ham jo mere end andre til i den direkte og rent elementære Erfaring at se Sandhedens Kriterium.

Men Udvidelsen af Begreberne er ikke knyttet til Figurdelenes deskriptive Egenskaber alene. Ogsaa Kongruenssætninger, der gælde indenfor et begrænset Rum, lade sig udvide, saa at man f. Eks. kan tale om indbyrdes ligestore Vinkler mellem en egentlig og hver af de to uegentlige Linier. Nu opstiller den Euclidiske Geometri, (idet vi holde os til en af Formerne af Parallelaxiomet), ogsaa den Paastand, at to rette Linier, der af en Transversal skæres under ligestore Vinkler, ogsaa (naar disse regnes paa passende Maade) maa skære enhver anden Transversal under ligestore Vinkler. Dette er som ovenfor nævnt lige saa sikkert for den empiriske Betragtning som enhver anden Grunderfaring — men heller ikke mere. Og nu viser det sig ad ren deduktiv Vej, at netop denne Sætning ikke som de andre vedbliver for de tilføjede Elementers Vedkommende at gælde med samme Grad af Nøjagtighed, som den, hvormed den gælder for Figurdele indenfor et begrænset Rum. Tvertimod, er der en nok saa lille Afvigelse fra Sætningens absolute Gyldighed for en lille Figur, vil Afvigelsen voxe og væsentlig kunne blive saa stor, man selv vil, naar man overskrider det begrænsede Rums Skranker. Derfor vil Empirikeren netop ved Parallelaxiomet ikke se bort fra Observationsfeilene, hvilket han dristig gør for de andre Axiomers Vedkommende.

I det ovenstaaende har man et Grundlag, paa hvilket en »Ikke-Euclidisk Geometri« lader sig opbygge.

Den her i sine Hovedideer givne Fremstilling af Primproblemets Natur er af temmelig ny Datum og hvad adskillige Enkeltheder angaar, knap nok fuldt udarbejdet. Det, der i rent mathematisk Henseende er det afgørende, skyldes her som paa andre fundamentale Omraader v. Staudt.

Mærkelig nok opstiller dog ogsaa han et Bevis for Parallelaxiomet,*) tiltrods for at hans Theori øjensynlig er uafhængig af dette; den første, der explicite har gjort opmærksom herpaa, er F. Klein.**)

Efter denne lange Redegørelse, vil det forstaas, hvad min Mening er med, at Forf. af den Bog, dette skulde anmelde, giver en ganske god Kritik af den Ikke-Euclidiske Geometri. Derved mener jeg nemlig, at Forf. i det Hele og Store har den rigtige Fornemmelse af, at det, der egentlig skal angribes, er Axiomernes empiriske Karakter. Derved slipper man for Mængden af de paa en ældre Opfattelse hvilende Indvendinger byggede paa, at Ikke-Euclidiske Resultater ikke stemme med Erfaringen! At han ikke overalt har frigjort sig herfra, beror vel dels paa, at den Ikke-Eucl. Geometri efter Forf. Mening er Fjenden, som bør angribes paa enhver Maade, dels paa, at den her skizzerede moderne Theori ikke synes ham bekendt.

Forøvrigt vender hans Polemik sig nærmest mod Helmholz og Riemann.

Slutningen af Bogen indeholder et Forsøg paa en ny Begrundelse af den Euclidiske Geometri ved Hjælp af en Lære om Addition af Punkter (eller rettere Vectorer) i en Plan, en Theori, der væsentlig bygger paa en Hypothese om Rummets ubetingede Ensartethed.

Da dette Udtryk dog alligevel nærmere maa forklares, ser jeg ikke, at der vil vindes meget derved. Overhovedet vil det vistnok vise sig, at den Euclidiske Geometri, hvad det væsentlige i Begrundelsen angaar, ogsaa bedst begrundes ved de Axiomer, som Systemets ældgamle Grundlægger selv har opstillet.

(C. J.)

---

*) Det samme som i Oppermanns Elementære Geometri.

**) Math. Annalen Bd. 4. En fortrinlig Fremstilling af Principerne findes i P[illegible] Die neuere Geometrie.

Løste Opgaver.

---

6. Hvorledes kan man ved Sammenknytning af 3 Inversorer (altsaa i alt Fald ved 12 Stænger) tvinge 2 Punkter af et leddet System til at beskrive Figurer, der ligge symmetrisk m. H. t. en given ret Linie. (C. J.)

Opløsning. Vi søge en nødvendig Betingelse for, at Inversjonerne A, B og C foretagne efter hverandre m. H. t. a, b og c bringe Planens Punkter over i de symmetriske Punkter m. H. t. L. Lad B føre a over i α; Planens uendelig fjærne Punkter føres da ved A efterfulgt af B uendelig nær til α, som derfor maa falde i c ɔ: a, b og c ligge paa samme rette Linje (abc), og Inversjonspotensen B er lig bc . ba. Lad dernæst a og a', b og b' være symmetriske Punkter m. H. t. L. A efterfulgt af B bringer a over i b, altsaa skal C bringe b over i a' ɔ: a' ligger paa (abc); men analogt maa b' falde paa (abc). Dette kan kun ske enten ved at (abc) $\perp$ L eller ved at (abc) $\equiv$ L. I første Tilfælde maa A $=$ ab . ac', B $=$ ba . bc og C $=$ cb . ca'; i det andet maa A $=$ ab . ac, B $=$ ba . bc og C $=$ ca . cb. Ved at udtrykke disse Afstande ved Abscisser, ser man endvidere let, at Antallet af negative Inversjonpotenser i det første Tilfælde er lige, i det andet derimod ulige; i det første Tilfælde ligge Punkterne før og efter Transformationen paa samme Side af (abc), i andet paa modsat Side af (abc) $\equiv$ L.

Vi ville nu omvendt vise, at de fundne Betingelser ere tilstrækkelige.

1. (abc) $\perp$ L. A, B og C knytter Punkterne paa L sammen i to projektive Punktrækker, hvor a svarer til a', b til b' og det uendelig fjærne Punkt til sig selv. Da den projektive Afhængighed bestemmes ved 3 Punktpar, maa den falde sammen med den, der defineres ved Symmetrien, og dette i Forbindelse med det tidligere udviklede viser, at enhver Cirkel gaar over til den symmetriske Cirkel q. e. d.

2. (abc) $\equiv$ L. a, b og c føres ved Transformationen over

i sig selv, altsaa vil det samme gælde om ethvert Punkt paa (abc). Paa lignende Maade som før ses heraf, at enhver Cirkel gaar over til den symmetriske q. e. d.

Frembringes nu Inversjonerne f. Eks ved Harts Inversorer, hvis Dimensioner og Sammenknytning afpasses efter de fundne Betingelser, er Symmetritransformationen opnaaet ved et System af 12 Stænger.

(P. Heegaard.)

Opgaver til Løsning.

27. Læg en ret Linie, saa at to givne Cirkler af den skære lige store Korder og saaledes, at man fra et af Skæringspunkterne mellem Cirklerne ser hele det afskaarne Stykke under en given Vinkel.

28. Find i et Cirkelbundt to Cirkler, for hvilke Radiernes Forhold er givet, og som fra et givet Punkt ses under lige store Vinkler.

(27—28 af P. Heegaard.)

29. Paa hvilken Kurve maa man lade $r \sin^2 2\theta = a$ rulle, for at Polen kan gennemløbe en ret Linie; hvilken Kurve vil ved Rulningen frembringes af Polaraxen.

(C. J.)

Rettelse:

I Opgave 25 læses Orthogonalkugler i st. f. Orthogonalcirkler.

Om den ubestemte Ligning af 1ste Grad.

Af J. P. Gram.

Den efterfølgende Artikel er med nogle Ændringer og Tillæg en Gjengivelse af et Foredrag, jeg i Decbr. f. A. har holdt i »Mathematisk Forening«. Min Hensigt dermed har været at fremdrage et specielt Problem af ganske elementær Natur og give en Oversigt over, hvorledes man til forskjellige Tider har taget fat paa dette Problems Løsning, samt dertil at knytte forskjellige mer eller mindre originale Betragtninger, dels for at karakterisere de forskjellige Synspunkter, dels for saavidt muligt at supplere de alt foreliggende Undersøgelser. Jeg har valgt netop den her behandlede Opgave, Opløsningen af den ubestemte Ligning $ax + by = c$, fordi den trods sin rent elementære Karakter er vigtig nok til at den maa behandles i alle Lærebøger, og dog saa at sige ligger lidt afsides i Systemet og hører til de Ting, der let noget negligeres. I al sin Simpelhed afgiver desuden dette Problems Historie et ganske godt Exempel paa den Udvikling — eller, om man vil, Mangel paa Udvikling — som i den nyere Tid har fundet Sted paa flere saadanne Omraader af den mathematiske Videnskab, som ikke ret have »været paa Moden«.

1. Den almindelige ubestemte Ligning af 1ste Grad mellem to ubekjendte har Formen

$$ax + by = c. \qquad (1)$$

Konstanterne a, b, c angive reelle hele Tal, og Opgaven er at bestemme reelle hele Tal x og y, som tilfredsstille Ligningen. For saa vidt man vil behandle denne Opgave i sin Almindelighed, er der ingen Grund til at gjøre Forskjel mellem positive og negative Løsninger, ej heller til at stille bestemte Betingelser til Fortegnene for Konstanterne a, b, c.

Da nemlig f. Ex.

$$ax + by = c$$

medfører, at $\qquad ax - b(-y) = c,$

$$-ax + b(-y) = -c \quad \text{o. s. v.},$$

saa ses umiddelbart, at enhver Løsning af en af Ligningerne $\pm a \,.\, x \pm b \,.\, y = \pm c$ ogsaa indbefatter en Løsning af enhver af de andre, som faas af den første ved blotte Fortegnsforandringer. Det er altsaa kun Bestemmelsen af de numeriske Værdier for x og y, hvorpaa det kommer an, og man kan dertil efter Omstændighederne vælge den Form af Ligningen, som falder bekvemmest.

Man indser ligeledes strax, at en nødvendig Betingelse for Existensen af en Opløsning er, at enhver Faktor, som er fælles for a og b, ogsaa maa forekomme i c. Efter alle saadanne Faktorers Bortdivision ville altsaa a og b blive indbyrdes primiske. Man kan derfor strax forudsætte Ligningen saaledes reduceret, at dette finder Sted, men det vil paa den anden Side være at foretrække, om Løsningen kan gives i en saadan Form, at den nævnte Forudsætning ikke behøves.

Hvis der existerer en enkelt Løsning $x = \alpha$, $y = \beta$, vil der altid findes uendelig mange.

Er nemlig d største fælles Maal for a, b, som tillige gaar op i c, saa vil

$$x = \alpha + m\frac{b}{d}, \quad y = \beta - m\frac{a}{d}$$

ogsaa tilfredsstille Ligningen (1), idet m er et vilkaarligt helt Tal, positivt eller negativt.

At alle Løsninger ere indbefattede i denne Formel følger af, at $ax + by = a\alpha + b\beta$ giver

$$\frac{\beta - y}{x - \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{a : d}{b : d}$$

Da den sidste Brøk er uforkortelig, maa man have $\beta - y = m \,.\, a : d$, $x - \alpha = m \,.\, b : d$ som ovenfor.

At der, naar Mulighedsbetingelsen er opfyldt, altid existerer Løsninger indses ved følgende Betragtning, hvor vi forudsætte a og b indbyrdes primiske, og skrive Ligningen under Fo

Opgaven kan formuleres saaledes: Man skal bestemme et Multiplum af a, som er lig c + et Multiplum af b.

Men opskrives nu en Række paa hinanden følgende Multipla af b, f. Ex. 1 . b, 2 . b, 3 . b ... saa ville under de givne Forudsætninger a paa hinanden følgende af disse give lutter forskjellige Rester ved Division med a (eftersom Forskjellen mellem to saadanne Multipla ikke kan være delelig med a). Følgelig vil det samme ogsaa være Tilfældet med a paa hinanden følgende Tal i Rækken 1 . b + c, 2 . b + c, 3 . b + c osv. En af de deraf fremgaaende Rester maa altsaa være 0, og dette vil gjentage sig periodisk for hver Gruppe paa a saadanne Tal. Heraf følger altsaa, at Ligningen

$$x = \frac{by + c}{a}$$

vil tilfredsstilles ved en eller anden Værdi af y mellem Grænserne k og k + a, hvor k kan vælges vilkaarlig.

Den tilsvarende Værdi af x bliver beliggende imellem Grænserne $\frac{bk + c}{a}$ og $\frac{bk + c}{a} + b$.

Man maa f. Ex. altid have en Løsning, for hvilken y ligger mellem Grænserne $-\frac{1}{2}a$ og $+\frac{1}{2}a$, eller mellem 0 og a, mellem a og 2a o. s. fr., forudsat at c ikke har en saadan Værdi, at y antager selve Grænseværdierne.

Saafremt den givne Lignings Koefficienter ere smaa Tal, vil man derfor med Lethed kunne løse Ligningen, idet man ved Forsøg bestemmer et Sæt Værdier af de ubekjendte.

Endnu et Par andre vigtige Konsekvenser af denne Betragtningsmaade skal fremhæves.

Antag $0 < c < ab$. Sættes da $k = -a$, faas en Værdi af y mellem $-a$ og 0. Den tilsvarende Værdi af x ligger mellem Grænserne $\frac{-ab + c}{a}$ og $\frac{-ab + c}{a} + b$, eller

$$\frac{-ab + c}{a} < x < \frac{c}{a},$$

hvoraf følger $-b < x < b$. Erindres nu, hvad ovenfor er

sagt om Fortegnenes Forandring, saa faa vi altsaa den almindelige Sætning: Naar den numeriske Værdi af Konstanten c er mindre end ab, existerer der altid mindst en Løsning, hvor uden Hensyn til Fortegnet samtidig $x < b$, $y < a$.

Da den almindelige Løsning af Ligningen

$$ax - by = c,$$

hvor a og b ere indbyrdes primiske, har Formen

$$x = \alpha + mb, \quad y = \beta + ma$$

vil det kunne ske, at der kan blive endnu en Løsning, der har samme Egenskab som den førstnævnte, og som da vil faas ved at sætte $m = 1$, men flere kan der under ingen Omstændigheder findes.

Jeg vil kalde saadanne Løsninger, hvor x og y ere resp. numerisk mindre end b og a, Minimalløsninger. Betingelsen for, at der existerer to saadanne, svarende til en forelagt Værdi af $c < ab$ er aabenbart den, at et Par sammenhørende Minimalværdier af x og y have samme Fortegn, hvis a og b have modsatte Tegn.

Naar dette er Tilfældet, vil det samme gjælde om hvert Par Værdier af x og y.

Er saaledes i Ligningen $ax = by + c$, $0 < c < b$, saa faas for $0 < y < a$

$$ax = by + c \leq b(a - 1) + b - 1 \leq ba - 1$$

altsaa

$$0 < x < b.$$

Det samme er endnu Tilfældet om ogsaa $c < b$, naar blot $c < a$, hvis $a > b$, idet da haves

$$ax = by + c \leq b(a - 1) + a - 1,$$

$$0 < x < b + 1.$$

Men $x = b$ er umulig, hvis c ikke er delelig med b, altsaa maa man have $x < b$.

Altsaa naar c er mindre end den største af Koefficienterne og ikk[illegible] med nogen af dem, saa exist[illegible] 'øsninger, en med

F. Ex.

$4x - 7y = 5$ giver

$x = \ldots -11 \quad -4 \quad 3 \quad 10 \quad 17 \ldots$

$y = \ldots \quad -7 \quad -3 \quad 1 \quad 5 \quad 9 \ldots$

$4x + 7y = 5$ giver

$x = \ldots -11 \quad -4 \quad 3 \quad 10 \quad 17 \ldots$

$y = \ldots \quad -7 \quad 3 \quad -1 \quad -5 \quad -9 \ldots$

Disse have altsaa hver to Minimalløsninger, medens

$4x - 7y = 23$ giver

$x = \ldots \quad 11 \quad 4 \quad -3 \quad -10 \quad -17 \ldots$

$y = \ldots \quad -3 \quad 1 \quad 5 \quad 9 \quad 13 \ldots$

og altsaa kun har en enkelt Minimalløsning.

Minimalløsningerne give stedse de numerisk mindste Tal, som tilfredsstille Ligningen, og den absolut mindste Løsning maa være en af dem; hvis der er to, kan man betragte Spørgsmaalet om Bestemmelsen af den absolut mindste Løsning som afgjort, naar man har fundet en Minimalløsning, hvor denne existerer.

Men Minimalløsninger efter den her angivne Definition findes kun for $c < ab$. Løsningerne af $a\xi - b\eta = nab + c$ kunne ganske vist umiddelbart faas af dem for $ax - by = c$ ved f. Ex. at sætte $\xi = x + nb$, $\eta = y$, men det er ikke umiddelbart givet, hvilken der skal kaldes den simpleste.

En almengyldig Definition faas ved som den absolut mindste Løsning at betegne den, for hvilken $x^2 + y^2$ er Minimum. Er $x = \xi$, $y = \eta$ en eller anden Løsning, saa skal altsaa Minimumssystemet bestemmes ved at

$$x^2 + y^2 = (\xi + mb)^2 + (\eta + ma)^2$$

er saa lille som muligt. Søger man paa sædvanlig Maade den Værdi af m, som giver Minimum af denne Funktion, faas $m = -\frac{b\xi + a\eta}{a^2 + b^2}$, men da m skal være et helt Tal, er det i Almindelighed ikke selve denne Værdi men enten det nærmest lavere eller det nærmest højere hele Tal, som skal bruges til Bestemmelsen af Minimumssystemet. Forøvrigt

frembyder Undersøgelsen af disse Systemer ikke megen almindelig Interesse.

En geometrisk Betragtning vil illustrere, hvad der ovenfor er fremsat. Opfatter man x og y som Koordinater i et retvinklet System, saa vil den forelagte Ligning $ax + by = c$ fremstille en ret Linie. De Punkter, hvis Koordinater betegne Ligningens Opløsning i hele Tal, ville være beliggende paa denne rette Linie med ækvidistante Intervaller, saaledes at Afstanden mellem to paa hinanden følgende af saadanne Punkter er $\sqrt{a^2 + b^2}$. For at faa Minimumssystemet har man fra Koordinaternes Begyndelsespunkt at fælde en vinkelret ned paa den givne rette Linie og tage den Opløsning, hvis tilsvarende Punkt ligger nærmest ved Perpendikulærens Fodpunkt.

2. Alle de Sætninger, vi hidtil have udviklet, ere saadanne, som kunne faas ved en ganske umiddelbar Betragtning af den forelagte Ligning. Vi skulle nu gaa over til at vise, hvorledes man i Tidens Løb har taget fat paa selve den numeriske Løsning.

Idet vi forbigaa Oldtidens Mathematikere, som ikke have haft nogen Indflydelse paa den moderne Theori for Løsningen af den foreliggende Opgave, bliver Bachet den første Forfatter, med hvem vi skulle beskjæftige os.

Bachet de Méziriac (1587—1638), en ældre Samtidig af Fermat, udgav 1621 den første trykte Udgave af Diophantos. Men allerede 1612 havde han udgivet en ret kuriøs Bog under Titlen »Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres«, hvis Indhold nærmest kan henføres under Betegnelsen »mathematiske Lege«. 2den forøgede Udgave af denne Bog udkom 1624 og endelig er efter 250 Aars Forløb 3die Udgave, besørget af Labosne, udkommen i 1874. Som Indledning havde Bachet givet en Række Sætni[illegible] se har Labosne udeladt [illegible] kortet Form i nogle

Noter, som vi lægge til Grund for den følgende Fremstilling af Bachets Fremgangsmaade.

For at løse Ligningen $ax = by \pm r$ eller, som Bachet udtrykker sig, at bestemme et Multiplum af a, som er r Enheder større (eller mindre) end et Multiplum af b, foreskriver han, at man skal dividere det største af Tallene a, b med det mindste, dette igjen med Divisionsresten o. s. fr., ligesom naar man søger største fælles Maal for a og b. Derved faas en Række Rester, som betegnes ved c, d, e... Har man nu f. Ex. $a = qb + c$, kan man ved Indsættelsen af denne Værdi for a i den givne Ligning reducere denne til en Ligning med Koefficienterne b, c, denne atter til en anden med Koefficienterne c, d, o. s. v. og saaledes fortsætte, indtil man kommer til en Ligning, som umiddelbart kan opløses, hvilket altid vil være Tilfældet, naar en af Koefficienterne gaar op i r. Man kan derefter gaa tilbage, idet man f. Ex., naar x og z i Ligningen

$$cx = bz \pm r$$

ere bekjendte, ved Addition af

$$ax = qbx + cx$$

faar

$$ax = b(qx + z) \pm r,$$

hvor altsaa $qx + z$ let kan beregnes.

Fremgangsmaaden ses bedst paa et Talexempel, og jeg vælger dertil et af dem, som findes hos Bachet, nemlig Ligningen $1007x = 211y + 10$.

De sukcessive Divisioner give efterhaanden følgende Talrække

a	b	c	d	e
1007	211	163	48	19,

idet

idet	$a = 4b + c$	eller	$1007 = 4 . 211 + 163$
	$b = 1c + d$		$211 = 1 . 163 + 48$
	$c = 3d + e$		$163 = 3 . 48 + 19$
	$d = 2e + 10.$		$48 = 2 . 19 + 10.$

Den øvrige Regning er efter Bachet følgende:

$$2e = 1 . d - 10$$

$$3d + e = c$$

$$(2 . 3 + 1) d = 2c + 10$$

eller

$$7d = 2c + 10$$

$$1 . c + d = b$$

$$(7 . 1 + 2) c = 7b - 10$$

altsaa

$$9c = 7b - 10$$

$$4b + c = a$$

$$(9 . 4 + 7) b = 9a + 10$$

altsaa

$$43b = 9a + 10.$$

Heraf sluttes atter

$$(211 - 9) a = (1007 - 43) b + 10,$$

eller

$$202a = 964b + 10,$$

hvorved Ligningen er opløst.

For at undgaa Opskrivningen af Ligningerne opstiller Bachet hele Regningen i et dobbelt Skema. Det første, som tjener til at vise Kvotienternes Beregning, ser for det valgte Exempel saaledes ud:

a	b	c	d	e
	4	1	3	2
1007	211	163	48	19
163	48	19	10	

Det andet, som vedrører Beregningen af x og y, bliver følgende:

4	1	3	2	
43	9	7	2	1.

Første Række fremstiller Kvotienterne, 2den Række begynder bagfra med 1, som sættes en Plads tilhøjre for den sidste Kvotient, hvorefter Tallene dannes fra højre til venstre saaledes: $2 = 2 . 1$, $7 = 3 . 2 + 1$, $9 = 1 . 7 + 2$, $43 = 4 . 9 + 7$. De to sidste Tal i Rækken (her 43 og 9) ere enten selve de søgte eller ogs[illegible]e med modsatte Fortegn.

Dog m[illegible] bemærkes, [illegible] er forudsat, at selve r

findes blandt Resterne, er dette ikke Tilfældet men derimod $r = p . e$, hvor e er den sidste Rest, saa maa de udkomne Tal multipliceres med p.

Bachet synes særlig at have tænkt sig dette sidstnævnte Skema anvendt paa Opløsningen af Ligningen $ax = by \pm 1$, og det er formentlig af denne Aarsag, at Dirichlet udtrykkelig (Zahlentheorie, 3. Ausg., p. 46, Anm.) nævner Bachet som den, hvem denne Lignings Løsning skyldes. Men i Virkeligheden er hans Synspunkt almindeligere, idet han ikke fortsætter Divisionerne længere, end til han kommer til en Rest, som gaar op i r. Det er ogsaa værd at bemærke, at han lægger Vind paa at faa Løsningen i de simplest mulige positive Tal og angiver det rigtige Kriterium paa, at dette er opnaaet.

Der maa vel siges at være nogen Ubehjælpsomhed til Stede i Bevisførelsen saaledes som den gjengives af Labosne, og den har sikkert i endnu højere Grad præget Bachets originale Fremstilling, men selve hans Løsning er i Virkeligheden saa hurtig og simpel, at Efterfølgernes Ændringer deraf ikke kunne anses for virkelige Forbedringer.

3. Efter Bachet synes ingen Forfatter af Betydning at have behandlet den samme Opgave førend Euler. Hans Undersøgelser indeholdes dels i to Afhandlinger i Petersborg Akademiets Skrifter (Comment. Acad. Petrop. VII, p. 46 og Novi Comm. Petropol. XI, p. 28), dels i 2den Del af hans Algebra (Anleitung zur Algebra 1770, udgivet paa Fransk af Garnier under Titel Élémens d'algèbre 1807 og forsynet med et Tillæg af Lagrange.

Efter det sidste Værk anføre vi følgende Exempel paa Eulers Fremgangsmaade:

Ligningen $$39p = 56q + 11$$

giver $$p = \frac{56q + 11}{39} = q + \frac{17q + 11}{39}.$$

Den sidste Brøk maa være et helt Tal. Dette betegnes ved r, altsaa faas

$$p = q + r$$

samt

$$39r = 17q + 11.$$

Herefter atter

$$q = \frac{39r - 11}{17} = 2r + \frac{5r - 11}{17} = 2r + s$$

$$17s = 5r - 11$$

$$r = \frac{17s + 11}{5} = 3s + \frac{2s + 11}{5} = 3s + t$$

$$5t = 2s + 11$$

$$s = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + u$$

$$2u = t - 11.$$

Nu faas sukcessive

$$t = 2u + 11$$
$$s = 2t + u = 5u + 22$$
$$r = 3s + t = 17u + 77$$
$$q = 2r + s = 39u + 176$$
$$p = q + r = 56u + 253$$

og man faar altsaa Værdierne af q og p i den almindeligste Form, indeholdende den arbitrære Konstant u.

I skematisk Form giver Euler Løsningen af Ligningen $bp = aq + n$ saaledes:

$a = Ab + c$	$p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + s$
$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
$d = De + f$	$s = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg$	$u = Fv \pm n,$

som forstaas uden Kommentar. Fortegnet for n er + eller —, eftersom Antallet af Ligninger er ulige eller lige. g maa gaa op i n, for at Løsningen skal være mulig.

Denne Fremgangsmaade, som kun i Fremstillingen afviger fra Bachets. ... m den Eulerske Algo-ri ... stisk ved den Eulerske

Løsning er først det, at denne fremtræder i den almindeligste Form, idet den vil komme til at indeholde en arbitrær Konstant. Af det anførte Skema vil man strax se, at man efter Elimination af samtlige Hjælpestørrelser maa have de ubekjendte i følgende Form

$$p = Pv + P'n$$
$$q = Qv + Q'n.$$

Konstanterne P og Q faas ved at antage $n = 0$. Sammenligning af de to Systemer af Ligninger viser da, at man samtidig maa have

$$a = P \cdot g$$
$$b = Q \cdot g,$$

hvor g er største fælles Maal for a og b, altsaa

$$P = \frac{a}{g}, \quad Q = \frac{b}{g}.$$

Ligeledes faas P′ og Q′ ved at antage $v = 0$ og $n = 1$, altsaa fremstille disse Løsninger af

$$bp = aq + 1.$$

Her have vi det andet karakteristiske Punkt af den Eulerske Løsning, nemlig det, at Euler principielt først reducerer Ligningen til denne Normalform, og naar denne er løst, faar den forelagte Lignings Løsning ved Multiplikation. Derved vil det imidlertid som i det første Exempel ofte vise sig, at han ikke strax faar den simpleste Løsning, men bagefter maa foretage en Reduktion for at finde denne. Hans Fremgangsmaade, som i Overskuelighed og Klarhed langt overgaar Bachets, staar paa dette Punkt ubetinget tilbage for denne.

Vi ville lidt nøjere betragte den Løsning (den »principale«), som faas for $v = 0$, $n = 1$, idet vi iøvrigt holde os til ovenanførte Skema, hvor altsaa ogsaa nu maa haves $g = 1$. Vi vide da, at p og q beregnes sukcessive ved Hjælp af Kvotienterne A, B, C, D, E, idet man begynder fra neden opad. Man kan med en af Gauss først anvendt Betegnelse skrive

$$p = [ABCDE], \quad q = [ABCD].$$

For de her optrædende Funktioner af A, B, C..., hvilke Sylvester i den nyeste Tid har betegnet ved Navnet Kumulanter, gjælder Fundamentalligningen

$$[ABCD\ldots] = A.[BCD\ldots] + [CDE\ldots],$$

som kun er et andet Udtryk for Formlerne og ligesom disse kan tjene til rekurrent Beregning af p og q. Vi skulle ikke gaa nøjere ind paa en detailleret Undersøgelse af saadanne Kumulanter, men nøjes med en Henvisning til Dirichlets Zahlentheorie og overlade til Læserne selv at udforske deres Udtryk ved Determinanter. Derimod skulle vi gjøre opmærksom paa, at den Eulerske Algorithme ogsaa kan gives en lidt ændret Skikkelse.

Skriver man nemlig det første Sæt Ligninger saaledes:

$$\begin{aligned} c &= a - Ab \\ d &= b - Bc \\ e &= c - Cd \\ f &= d - De \\ 1 = g &= e - Ef, \end{aligned}$$

saa kunne vi efterhaanden udtrykke d, e, f, g ved a og b, og altsaa ende med at faa g udtrykt som lineær Funktion af a og b, m. a. O. vi faa

$$1 = bp - aq,$$

hvorved altsaa Ligningen ogsaa er opløst.

De Koefficienter, som ved denne Beregning efterhaanden optræde til a og b, blive ligeledes Kumulanter, men adskille sig fra de forrige ved en modsat Ordning af Elementerne og Forandring i Fortegnene.

Ved denne Beregningsmaade føres vi uvilkaarlig til det næste Stadium i Udviklingen, nemlig Kjædebrøkernes Anvendelse paa Løsningen af den ubestemte Ligning. Denne skyldes Lagrange.

4. Ifø [illegible] ri beregnes de sukcessive

[illegible] e $\frac{x_r}{y_r}$ til Kjædebrøken

$$\frac{x}{y} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$ ved Formlen

$$x_r = a_r x_{r-1} + x_{r-2}$$
$$y_r = a_r y_{r-1} + y_{r-2},$$

hvor a_r betegne de ufuldstændige Kvotienter. Heraf følger som bekjendt

$$y_r x_{r-1} - x_r y_{r-1} = (-1)^r.$$

Deraf faas altsaa umiddelbart, at en af Ligningerne

$$ax - by = \pm 1$$

stedse vil erholdes opløst i hele Tal ved for x og y resp. at tage Tæller og Nævner i den næstsidste Konvergent til den sædvanlige Kjædebrøk for $\frac{b}{a}$, og at altsaa Løsningen af af $ax - by = n$ vil erholdes ved at multiplicere de saaledes fundne Tal med $\pm$ n. Da endvidere ifølge Kjædebrøkernes Theori $x_{r-1} < x_r$, $y_{r-1} < y_r$, saa bliver ogsaa i ovenstaaende Ligning $x < b$, $y < a$, saa at man faar en Minimalløsning, saa længe højre Side er ± 1.

Det fortjener ogsaa at bemærkes, at de samme Værdier af x og y, som tilfredsstille $ax - by = \pm 1$, tillige ville tilfredsstille den Ligning, som faas ved at erstatte b og a med Tæller og Nævner i den 3die sidste Konvergent, men de give da ikke nødvendigvis en Minimalløsning.

F. Ex. $152x - 59y = 13$. Jul. Petersen, Arithmetik og Algebra.

152 : 59 giver

Kvotienterne 2 1 1 2 1 3 2

og Konvergenterne $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{13}{5}$ $\frac{18}{7}$ $\frac{67}{26}$ $\frac{152}{59}$.

Altsaa er $x = 26$, $y = 67$ en Minimalløsning af

$$152x - 59y = -1$$

og ligeledes en Løsning af

$$18x - 7y = -1,$$

Den almindelige Løsning af $152x - 59y = 13$ bliver nu

$$x = -13.26 + 59m, \quad y = -13.67 + 152m,$$

eller efter Reduktion til Minimalløsning

$$x = 16 + 59m', \quad y = 41 + 152m'.$$

Fordelen ved Anvendelsen af Kjædebrøkstheorien er fra et systematisk Synspunkt iøjnefaldende. Man opnaar ved at lade Løsningen fremtræde som en speciel Anvendelse af en bekjendt Theori at kunne formulere den paa en særdeles simpel Maade, endvidere at reducere Beviset til et Par Ord og strax at faa Klarhed over Løsningens Mulighed, samt endelig Bevis for, at man for $n = 1$ virkelig faar en Minimalløsning.

Disse Fordele ere saa betydelige, at man vel forstaar, at Lærebogsforfatterne med Forkjærlighed have dvælet ved denne Løsning, og at den efterhaanden næsten er bleven fremstillet som den eneste, der var værd at omtale.

Men overfor disse Fordele staar ved nøjere Betragtning nok saa store Mangler. Først den, at det er uheldigt at gjøre en saa simpel Sag som denne afhængig af en Theori, der neppe hører til dem, som Eleven faar saa grundigt Kjendskab til, at han ret føler sig hjemme deri, og som i hvert Fald slet ikke er nødvendig for Problemets Løsning og ej heller giver nogen virkelig Indsigt deri. Dernæst, at Løsningen kræver mere Regning end Bachets eller Eulers Fremgangsmaade, idet der kræves en selvstændig Beregning af Konvergenternes Tællere og Nævnere hver for sig, medens de første Methoder kun kræve en enkelt saadan Række Tal. Endelig, at Løsningen er baseret paa, at højre Side af Ligningen skal være lig 1. Thi derved bliver ikke blot i andre Tilfælde en Multiplikation og en særegen Eftersøgelse af Minimalløsningen nødvendig, men man maa ogsaa, hvis det viser sig, at a og b have en fælles Faktor, særlig prøve, om denne muligvis gaar op i det konstante Led.

Den **bedst mulige** Opløsningsmaade maa være saaledes, at den strax giver Minimalløsning med den mindst

mulige Regning, at den giver Løsningen i den almindeligste Form, og at den strax kan anvendes, uden at der behøves nogen foreløbig eller senere Prøve af, om Løsningen er mulig eller ikke, idet dette bør fremgaa af selve de Operationer, som føre til Løsningen.

(Fortsættes.)

Løst Opgave.

27. Læg en ret Linie, saa at to givne Cirkler af den afskære lige store Korder og saaledes, at man fra et af Skæringspunkterne mellem Cirklerne ser hele det afskaarne Stykke under en given Vinkel.

(P. Heegaard.)

Opløsning. Lad Cirklernes ene Skæringspunkt være A, Endepunkterne af den søgte Linie B og C, saaledes altsaa at $\angle$ BAC er given. Midtpunktet M af BC vil da ligge paa Cirklernes Potenslinie, saaat den fjerde Vinkelspids D, af Parallelogrammet ABDC ogsaa ligger paa Potenslinien. Da Vinklerne ABD og ACD ere bekendte, gaa BD og CD gjennem hver sit faste Punkt, et paa hver af Cirklerne. Punktet D er nu bestemt, idet $\angle$ BDC er lig den givne Vinkel, og den øvrige Del af Konstruktionen kan nu udføres ved at bestemme M, og multiplicere den ene af Cirklerne med — 1 m. H. t. M, hvorved B eller C bestemmes som Skæringspunkt mellem den nye Cirkel og den anden givne Cirkel. Opgaven har to Løsninger.

(F. Bonnesen.)

Tilføjelse til Løsningen af Opgave 6.

I dette Tidsskrifts forrige Hefte B. S. 55 har Hr. stud. mag. P. Heegaard paa en smuk og almindelig Maade løst den Opgave, at bestemme tre Inversioner, der udførte efter hinanden føre til Symmetri m. H. t. en ret Linie. Herved er dog glemt én af Mulighederne, nemlig den, at to Inversionscentrer falde sammen. De to herved udhævede af Inversionerne kunne aabenbart ikke følge hinanden men maa adskilles ved den tredje Inversion B. Det er derefter let at sé (f. Ex. ved at følge samme Vej som Hr. Heegaard), at de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser simpelt hen blive de, at Transformationerne A og C ere identiske, saaledes at det fælles Inversionscentrum ikke forandres ved Transformationen B.

Endnu skal jeg tilføje, at jeg i Tidsskriftet har stillet Opgaven i en noget speciellere Form end den, hvori jeg engang selv gav mig af med den. Det oprindelige Spørgsmaal var det, at bestemme 4 Inversioner, hvis Produkt gav Identitet. Man vil let sé, at denne Opgave i alt væsentligt er løst samtidig med den her omhandlede.

(C. J.)

Udkommen Bog.

Opgaver i ren Matematik,
til Brug ved Afslutning af det elementære Kursus
og til Selvstudium,
af cand. mag. Niels Nielsen.
Gyldendalske Boghandels Forlag (Hegel og Søn).
Kjøbenhavn 1892.

Om den ubestemte Ligning af 1ste Grad.

Af J. P. Gram.

(Fortsat).

---

5. Ingen af de hidtil omtalte Fremgangsmaader opfylder disse Fordringer fuldt ud. Der findes imidlertid endnu en, der i hvert Fald kommer dette meget nær. Det er den Fremgangsmaade som findes omtalt i Hr. Adjunkt F. Thaarups Artikel i dette Tidsskrifts Afdeling A, 1ste Aargang, Side 1. Mærkelig nok synes man tidligere at have undervurderet denne Løsning — en simpel Modifikation af den Eulerske — de eneste to Lærebøger af dem, jeg har undersøgt, som have den, er Steens Rene Mathematik og Todhunters Algebra. Begge disse Forfattere anføre den vel, men kun for at vise den paa et Exempel og synes aldeles ikke at have Øje for dens principielle Betydning. Jeg skal derfor noget nærmere diskutere denne Fremgangsmaade, som kun adskiller sig fra den Eulerske ved, at man foruden at reducere Koefficienterne a og b ogsaa samtidig reducerer det uafhængige Led.

F. Ex. Ligningen $18x = 7y + 12$ giver $y = \frac{18x - 12}{7}$, som skal være hel.

Men medens Euler nøjes med at sætte $y = 2x + \frac{4x - 12}{7}$, udføres nu Divisionen ogsaa i Tællerens andet Led, altsaa sættes

$$y = 2x - 1 + \frac{4x - 5}{7} = 2x - 1 + z,$$

saa at næste Ligning bliver

$$7z = 4x - 5.$$

Derefter fortsættes saaledes:

$$x = z + 1 + \frac{3z + 1}{4} = z + 1 + u,$$

$$4u = 3z + 1,$$

$$z = u + \frac{u - 1}{3} = u - v,$$

$$3v = u - 1.$$

Nu faas altsaa efterhaanden Løsningerne af de forskjellige Ligninger saaledes:

$$u = 3v + 1,$$
$$z = u + v = 4v + 1,$$
$$x = z + 1 + u = 7v + 3,$$
$$y = 2x - 1 + z = 18v + 6.$$

De to sidste angive Løsningen af den forelagte Ligning i den simpleste og almindeligste Form.

Man kan komme lidt hurtigere til Maalet ved at benytte de absolut mindste Rester. Vi vise dette paa det sidste Exempel, idet vi tillige anvende en simplere Opskrivning. I første Linie staar den givne Ligning, den næste Linie fremstiller den Kvotient, som faas ved Division af Ligningen med den mindste Koefficient, idet en ny ubekjendt tilføjes som Udtryk for den brudne Del af Kvotienten. Subtraktion af Kvotient gange Divisor giver som Rest den nye Ligning.

Altsaa:

$$18x - 7y = 12.$$
$$3x - y + z = 2. \quad y = -2 + 3x + z = 6 - 18u.$$
$$-3x - 7z = -2.$$
$$x + u + 2z = 1. \quad x = 1 - 2z - u = 3 - 7u.$$
$$3u - z = 1. \quad z = -1 + 3u.$$

I almindeligere Form kan den Algorithmus, som kommer til Anvendelse, fremstilles ved efterfølgende Skema, hvor vi benytte $x_0, x_1 \ldots$ som Betegnelse for de ubekjendte, $a_0, a_1 \ldots$ for Koefficienterne, $r_0, r_1 \ldots$ for de konstante Led, $q_1, q_2 \ldots$ og $n_1, n_2 \ldots$ for de respektive Rækker af Kvotienter.

$a_0 x_1 - a_1 x_0 = r_0$	$a_0 =$	$r_0 =$	$x_0 =$
	$q_1 a_1 + a_2$	$n_1 a_1 + r_1$	$-n_1 + q_1 x_1 + x_2$
$a_2 x_1 - a_1 x_2 = r_1$	$a_1 =$	$r_1 =$	$x_1 =$
	$q_2 a_2 + a_3$	$n_2 a_2 + r_2$	$n_2 + q_2 x_2 + x_3$
$a_2 x_3 - a_3 x_2 = r_2$	$a_2 =$	$r_2 =$	$x_2 =$
	$q_3 a_3 + a_4$	$n_3 a_3 + r_3$	$-n_3 + q_3 x_3 + x_4$
$a_4 x_3 - a_3 x_4 =$ [illegible]	[illegible]	$r_3 =$	$x_3 =$
		$a_4 + r_4$	$n_4 + q_4 x_4 + x_5$

Størrelserne a_0 a_1 a_2 ... danne en stedse aftagende Række, hvis sidste Element er største fælles Maal g for a_0 og a_1. Samtidig bliver r_1 og hvert følgende r $<$ end det a, der har samme Index. Ere a_0 og a_1 indbyrdes Primtal, kan man ende med en Ligning, hvor den ene Koefficient er 1, medens r er mindre end den anden Koefficient, nemlig enten

$$1 \, . \, x_i - a_i \, x_{i+1} = r_i, \text{ eller } a_i \, x_{i+1} - 1 \, . \, x_i = r_i,$$

som giver $x_i = \pm r_i + a_i \, x_{i+1}$. Her kan x_{i+1} erstattes med et vilkaarligt helt Tal k, og ved derefter at regne tilbage faas efterhaanden x_{i-1}, x_{i-2} ... osv., idet den arbitrære Konstant bliver k. Løsningen er da aabenbart altid mulig, og man faar den almindeligste Løsning, eftersom der ved de sukcesive lineære Substitutioner af nye ubekjendte ikke er indført nogen ny Forudsætning, og Løsningen af den sidste Ligning har fuld Almindelighed.

Have a_0 og a_1 den fælles Faktor g, maa denne forekomme i hele Rækken af a, og vi ende altsaa med en Ligning, der kan skrives

$$a_{i+1} \, x_i - a_i \, x_{i+1} = \pm r_i,$$

hvor $a_{i+1} = g$. For at denne skal være mulig, maa g ogsaa gaa op i r_i. Om dette er Tilfælde eller ikke, vil vise sig af sig selv, naar Operationen fortsættes paa sædvanlig Maade ved Division med a_{i+1}, idet den næste Ligning da faar Formen

$$a_{i+1} \, x_{i+2} + 0 \, . \, x_{i+1} = r_{i+1}.$$

Enten er her $r_{i+1} = 0$, og da er Ligningen mulig og løses paa sædvanlig Vis, idet den sidste Substitution giver

$$x_i = \pm n_{i+1} + q_{i+1} \, x_{i+1},$$

eller ogsaa er r_{i+1} forskjellig fra 0 og $< a_{i+1}$, altsaa den sidste Ligning umulig, det samme gjælder da om den forelagte.

Heraf ses altsaa, at naar man uden videre fortsætter Operationerne, til man faar den ene Koefficient lig 0, hvilket altid er muligt, saa vil man derved umiddelbart med det samme faa afgjort, om Løsningen af den forelagte Ligning er mulig eller ikke.

6. Tilbage staar endnu at undersøge, hvorledes den

specielle Løsning, for hvilken den arbitrære Konstant har Værdien o, forholder sig til Minimalløsningerne, forsaavidt disse ere tilstede.

Her kunne vi nu først bemærke, at medens Koefficienterne i den oprindelige Ligning $a_0 x_1 - a_1 x_0 = r_0$ ikke ere underkastede nogen Betingelse, saa har derimod den næste Ligning $a_2 x_1 - a_1 x_2 = r_1$ den Egenskab, at r_1 er mindre end den største Koefficient a_1, og den samme Egenskab tilkommer alle de følgende afledede Ligninger. Vi gjøre nu for Simpelheds Skyld den Forudsætning, at a_0 og a_1 ere indbyrdes Primtal.

Alle de afledede Ligninger ville da — forudsat at ikke højre Side er o — hver især have to Minimalløsninger, ifølge hvad der tidligere er udviklet. Altsaa maa f. Ex. for Ligningen $a_2 x_1 - a_1 x_2 = r_1$ de to Værdier af x_1, som ere numerisk $< a_1$, og af hvilke den ene er positiv, den anden negativ, høre sammen hver med sin af de to Værdier af x_2 med modsatte Fortegn, som ere numerisk $< a_2$.

Med andre Ord, naar man ved, at uden Hensyn til Fortegnet $x_2 < a_2$, saa er ogsaa nødvendig $x_1 < a_1$, o. s. fr.

Idet nu Algorithmen ender med Ligningen

$$1 . x_i - a_i x_{i+1} = \pm r_i,$$

saa giver denne Løsningen

$$x_i = \pm r_i + k a_i,$$

altsaa for $k = 0$, $\qquad x_i = \pm r_i < a_i$.

I den nærmest foregaaende Ligning

$$a_{i-1} x_i - a_i x_{i-1} = \pm r_{i-1}$$

er altsaa samtidig $x_{i-1} < a_{i-1}$, og saaledes ses ved fremdeles at gaa tilbage, at man ved at sætte $k = 0$ faar lutter Minimalløsninger af alle Hjælpeligningerne. For den oprindelige Ligning faas følgelig ogsaa den ene Ubekjendte (her x_1) mindre end Koefficienten til den anden. For denne sidstes Vedkommende faa vi ligeledes sikkert en Minimalværdi, hvis $r_0 < a_0 a_1$; er den forelagte Ligning saaledes, at den har Minimalløsninger, faa vi altsaa nødvendigvis en af disse. For større Værdier af r_0 end $a_0 a_1$ lader sig ikke sige andet, end at x_1 f[illegible] er $< a_1$.

Hvis det indtræffer, at et eller andet r bliver o; saa bliver det samme Tilfælde med alle de følgende r; de tilsvarende Kvotienter n blive altsaa ogsaa o og faa ingen Betydning for den principale Løsning. Haves f. Ex. $r_3 = 0$, saa ser den paagjældende Del af Skemaet saaledes ud:

$$a_2 x_3 - a_3 x_2 = r_2$$

$$a_2 = q_3 a_3 + a_4,\ r_2 = n_3 a_3 + 0,\ x_2 = -n_3 + q_3 x_3 + x_4$$

$$a_4 x_{4_3} - a_3 x_4 = 0$$

$$a_3 = q_4 a_4 + a_5,\ r_3 = 0, \qquad x_3 = 0 + q_4 x_4 + x_5$$

o. s. v.

Vi faa altsaa strax $x_2 = -n_3$, $x_3 = 0$, som er en Minimalløsning af den første af opskrevne Ligninger, og derefter faas ved Benyttelsen af disse fremdeles Minimalløsninger af den foregaaende Ligning, o. s. fr.

Da det her udviklede gjælder uafhængig af Fortegnene for Konstanterne, og da en mulig tilstedeværende fælles Faktor for a_0, a_1 og r helt udgaar af Løsningen, fordi denne kun afhænger af Kvotienterne, saa ses at det foregaaende gjælder fuldstændig almindeligt, og at vi paa denne Maade have bevist, at idetmindste den ene af de ubekjendte bliver udtrykt ved en af de to mindst mulige Talværdier.

Jeg skal ikke her opholde mig ved Opstilling af et for numerisk Beregning særlig egnet Skema, dette vil Enhver, som har Brug derfor, med Lethed kunne danne sig. Derimod er det ikke overflødigt at paavise, hvorledes denne ændrede Eulerske Løsning kan sættes i Forbindelse med Løsningen med Kjædebrøk.

7. Jeg vil derved gjøre Brug af en mindre bekjendt Sætning om Kjædebrøker, som ogsaa af anden Grund turde fortjene Interesse.

Vi antage, at Kvotienten $\frac{y}{z} = \frac{a_0}{a_1}$ skal udvikles i Kjædebrøk, og at de sukcessive ufuldstændige Kvotienter betegnes som ovenfor ved q_r, Divisionsresterne ved a_r, Konvergenterne ved $\frac{y_r}{z_r}$; altsaa

$$\frac{y}{z} = \frac{a_0}{a_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}$$

Saa haves $\frac{y_0}{z_0} = \frac{1}{0}$, $\frac{y_1}{z_1} = \frac{q_1}{1}$, $\frac{y_2}{z_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}$ osv., og almindelig som bekjendt

$$\frac{y_i}{z_i} = \frac{q_i y_{i-1} + y_{i-2}}{q_i z_{i-1} + z_{i-2}}.$$

Sætter man her paa højre Side i Stedet for den ufuldstændige Kvotient q_i den tilsvarende fuldstændige, som er $\frac{a_{i-1}}{a_i}$, saa faas paa venstre Side aabenbart selve Kjædebrøken, altsaa efter Multiplikation i Tæller og Nævner med a_i

$$\frac{y}{z} = \frac{a_{i-1} y_{i-1} + a_i y_{i-2}}{a_{i-1} z_{i-1} + a_i z_{i-1}}.$$

Heraf sluttes, idet k er en ubestemt Konstant,

$$ky = a_{i-1} y_{i-2} + a_i y_{i-2},$$
$$kz = a_{i-1} z_{i-1} + a_i z_{i-2}.$$

Elimineres nu a_{i-1}, faas

$$k.(y z_{i-1} - y_{i-1} z) = a_i (y_{i-2} z_{i-1} - y_{i-1} z_{i-2}) = (-1)^i a_i,$$

medens Elimination af a_i giver

$$k(y z_{i-1} - y_{i-2} z) = a_{i-1}(y_{i-1} z_{i-2} - y_{i-2} z_{i-1}) = (-1)^{i-1} a_{i-1}.$$

Heraf ses altsaa, at k, som maa være et helt Tal eftersom Brøken $\frac{y}{z}$ er uforkortelig, maa være Faktor baade i a_i og a_{i-1}, og hvis disse ere indbyrdes Primtal, eller med andre Ord, hvis a_0 og a_1 ere indbyrdes Primtal, maa k være lig 1. Da man ved at danne de tilsvarende Ligninger for den nærmest foregaaende eller efterfølgende Værdi af i faar Ligninger, af hvilke en skal være identisk med den ene af de ovenstaaende, saa maa Konstanten k være den samme i alle Ligninger og kan altsaa kun være den største fælles Faktor for a_0 og a_1, nemlig den sidste Kvotie[illegible] erholdes. Altsaa haves almindelig

$$a_0 z_i - \ldots 1)^{i+1} a_{i+1},$$

om [illegible] ndbyrdes Primtal eller ikke.

Ved Benyttelsen af denne Ligning kunne vi ikke blot umiddelbart angive Løsningen af $a_0 x_1 - a_1 x_0 = \pm 1$, men ogsaa af de almindeligere Ligninger $a_0 x_1 - a_1 x_0 = \pm a_i$, ved Hjælp af Kjædebrøks Konvergenter.

Er der nu forelagt $a_0 x_1 - a_1 x_0 = r_0$, og man har r_0 udtrykt ved de sukcessive Divisionsrester $a_1 a_2 \ldots$ saaledes:

$$r_0 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + \ldots,$$

saa kan den søgte Løsning aabenbart faas som

$$x_0 = n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + n_3 \xi_3 \ldots$$

$$x_1 = n_1 \eta_1 + n_2 \eta_2 + n_3 \eta_3 \ldots,$$

naar de her indgaaende Størrelser $\xi\ \eta$ bestemmes ved Ligningerne

$$a_0 \xi_1 - a_1 \eta_1 = a_1$$

$$a_0 \xi_2 - a_1 \eta_2 = a_2$$

$$a_0 \xi_3 - a_1 \eta_3 = a_3$$

osv.

Men disse Ligninger tilfredsstilles ved Tællere og Nævnere i de sukcessive Konvergenter i Kjædebrøken for $\frac{a_0}{a_1}$, tagne med afvexlende Fortegn.

Vi faa altsaa

$$x_0 = -n_1 y_0 + n_2 y_1 - n_3 y_2 + n_4 y_3 \ldots$$

$$x_1 = -n_1 z_0 + n_2 z_1 - n_3 z_2 + n_4 z_3 \ldots$$

hvilket er en Generalisation af den sædvanlige Kjædebrøksløsning.

Ved en opmærksom Betragtning af Algorithmen S. 74 vil man se, at denne ligeledes giver den principale Løsning i Form af en lineær Funktion af de sukcessive n, og at Koefficienterne idetmindste for de første n ville stemme overens efter begge Fremgangsmaader. Denne Overensstemmelse vil bestandig være tilstede, idet der i begge Tilfælde vil findes de samme Relationer mellem tre paa hinanden følgende Koefficienter til Størrelserne n.

Det vil være tilstrækkeligt at paavise dette for et enkelt Tilfælde. Betegne vi det for x_0 af Algorithmen fremgaaende Udtryk saaledes

$$x_0 = -n_1 Q_0 + n_2 Q_1 - n_3 Q_2 + n_4 Q_3 - n_5 Q_5 \ldots,$$

da ville de Led, som indeholde n_1, n_2, n_3, n_4 kunne faas ved at begynde Regningen ved x_3, idet x_4 og x_5 sættes $= 0$.

For derfra at gjøre Overgangen til det næste Led behøver man kun at erstatte n_4 ved $n_4 - q_4 n_5$ og $-n_3$ ved $-n_3 - n_5$. De to Led i ovenstaaende Formel $-n_3 Q_2 + n_4 Q_3$ forandres da til
$$-n_3 Q_2 + n_4 Q_3 - n_5 (Q_2 + q_4 Q_3),$$
som skal være lig med
$$-n_3 Q_2 + n_4 Q_3 - n_5 Q_4;$$
altsaa er
$$Q_4 = q_4 Q_3 + Q_2.$$

Men denne Relation er ganske analog med
$$y_4 = q_4 y_3 + y_2,$$
og da tilsvarende Ligninger bestaa for alle de andre Koefficienter til Størrelserne n, følger heraf, at de Koefficienter, som faas ved Algorithmen, netop ere selve Kjædebrøkskonvergenternes Tællere og Nævnere, og at man altsaa kan udtrykke Minimalløsningerne, hvor disse findes, som lineære Kombinationer af Tællere og Nævnere i Konvergenterne til Kjædebrøken $\frac{a_0}{a_1}$. Derved er altsaa den væsentligste Ulempe ved Kjædebrøksløsningen i den sædvanlige Form fjernet.

For at vise Anvendelsen paa et Talexempel vælger jeg Ligningen
$$2538\, x_0 - 741\, x_1 = 2685$$
og nøjes med at angive Løsningen i skematisk Form.

a	q	r	n	y	z	± ny	± nz
2538	-	-	-	- -	-	-	-
741	3	2685	3	1	0	−3	0
315	2	462	1	3	1	3	1
111	2	147	1	7	3	−7	−2
93	1	36	0	17	5	0	0
18	5	36		24	7	−48	−14
3	6			137	40	0	0
[illegible]				846	247	−55	−15

)5) $= -38075 + 40755 = 2685$.

De givne Koefficienter have den fælles Faktor 3. Ligningens Mulighed viser sig ved, at r bliver o samtidig med a, i det foreliggende Tilfælde gaar endog den næstsidste Divisor 18 op i det tilsvarende r. Det viser sig, at vi faa en Minimalløsning med negative Værdier, den fuldstændige Løsning er

$$x_0 = -15 + 247k, \quad x_1 = -55 + 846k.$$

8. For Fuldstændigheds Skyld skal jeg endnu paa et Exempel vise Anvendelsen af et ganske andet Princip, som undertiden med Fordel kan benyttes, hvor man har med smaa Tal at gjøre. Ligningen være $39x + 17y = 145$.

$$\left.\begin{array}{l} 145 = 3 \cdot 39 + 28 \\ 145 = 8 \cdot 17 + 9 \end{array}\right\} \text{Resterne elimineres, hvilket giver}$$

$$19 \cdot 145 = 224 \cdot 17 - 27 \cdot 39.$$

Ved Addition af et passende Multiplum af $0 = 39 \cdot 17 - 17 \cdot 39$ dannes en Ligning, hvoraf Faktoren 19 kan bortdivideres.

Altsaa løses Ligningen $17m + 27 = 19n$.

$$\begin{array}{l} 27 = 1 \cdot 17 + 10 \\ 27 = 1 \cdot 19 + 8 \\ \hline 27 = 5 \cdot 19 - 4 \cdot 17, \text{ altsaa } m = 4. \end{array}$$

Følgelig faas fremdeles

$$\begin{array}{rl} 19 \cdot 145 &= 224 \cdot 17 - 27 \cdot 39 \\ 0 &= 156 \cdot 17 - 68 \cdot 39 \\ \hline 19 \cdot 145 &= 380 \cdot 17 - 95 \cdot 39 \\ 145 &= 20 \cdot 17 - 5 \cdot 39 \quad \text{ɔ: } x = -5, \ y = 20, \end{array}$$

hvilket Resultat man iøvrigt ogsaa kunde have naaet ved at benytte de negative Rester. Methoden er fordelagtig, hvor de to Rester afvige ganske lidt fra hinanden.

Hermed maa vel Spørgsmaalet om den almindelige Løsning af den forelagte Ligning siges at være saa temmelig udtømt; Undersøgelsen af Ligninger med flere Ubekjendte ligger udenfor min Opgave. Jeg kan dog ikke undlade at gjøre opmærksom paa, at den ændrede Eulerske Algorithme ogsaa synes at give den simpleste Løsning af saadanne Ligninger. Jeg skal blot anføre følgende Exempel:

$$39x - 50y + 71z = 114$$
$$x - u - y + 2z = 3 \qquad \text{Gange } 39.$$

$$39u - 11y - 7z = -3$$
$$5u - y - z - v = 0 \qquad \text{»} \quad 7.$$

$$4u - 4y + 7v = -3$$
$$u - y - t + 2v = -1 \qquad \text{»} \quad 4.$$

$$4t - v = 1.$$

$$v = -1 + 4t$$
$$y = 1 - t + u + 2v = -1 + 7t + u$$
$$z = 0 - y + 5u - v = 2 - 11t + 4u$$
$$x = 3 + y - 2z + u = -2 + 29t - 6u,$$

som fremstiller den explicite Løsning med 2 arbitrære Konstanter t, u og ialtfald for de principale Værdiers Vedkommende i de simpleste hele Tal.

9. Foruden de her omtalte Fremgangsmaader kunde endnu anføres Behandlingen af Ligningen $ax + by = r$ ved Kongruenser, idet denne Ligning ogsaa kan løses ved at bestemme en Rod i en af Kongruenserne

$$ax \equiv r \pmod{b}, \quad by \equiv r \pmod{a}.$$

Paa denne Side af Sagen skal jeg dog ikke gaa nærmere ind. Thi for det første har den Løsning, som deraf kan udledes ved Hjælp af Fermats Theorem, og som i det simpleste Tilfælde fremstilles ved

$$x \equiv ra^{b-2} \pmod{b},$$

ikke stor praktisk Interesse. Og for det andet henhøre Betragtninger over Kongruenser til en helt anden Sfære end de foregaaende. Det maa nemlig erindres, at medens den sædvanlige elementære Arithmetik opererer med en Talrække, som geometrisk kan tænkes fremstillet ved en uendelig Række ækvidistante P[illegible] ret Linie, saa opererer man derimod i Ko[illegible] sæt kun med et endeligt Antal ækvid[illegible] kel. For Modulus 11 ere med [illegible] v. ikke blot at betragte som [illegible] e at anse som identiske,

kun formelt forskjellige Betegnelser af den samme Plads paa Cirklen. Kongruenstheorien giver ikke og kan ifølge sin Natur ikke give noget Middel til at gjøre Forskjel imellem dem. Derfor hører Kongruensernes Theori ej heller til den elementære Mathematik, og da denne Afhandling helt igjennem bevæger sig paa dette Gebet, har jeg anset det for korrektest at udelukke saadanne Undersøgelser, som ikke falde ind under denne.

10. Efter at de numeriske Værdier af de søgte Løsninger ere fundne i almindelig Form, kan der blive Spørgsmaal om at undersøge, hvor mange af dem der ligge indenfor visse Grænser. Af disse Diskussionsopgaver skulle vi kun kortelig omtale en enkelt, nemlig Undersøgelsen af, hvor mange positive Løsninger der tilfredsstille Ligningen

$$ax + by = r,$$

naar alle Konstanterne ere positive, a og b indbyrdes primiske.

Lad den almindelige Løsning være

$$x = \xi + mb, \qquad z = \eta - mb,$$

saa faas som Betingelse for positive Løsninger

$$\frac{\eta}{a} > m > -\frac{\xi}{b}.$$

Grænsernes Forskjel er $\frac{\xi}{b} + \frac{\eta}{a} = \frac{r}{ab}$, og Antallet af hele Tal, som ligge imellem Grænserne, er altsaa enten det største hele Tal i Kvotienten $\frac{r}{ab}$, hvilket vi betegne ved $E\frac{r}{ab}$ eller ogsaa $E\frac{r}{ab} + 1$.

Er ξ, η den mindste positive Løsning af den anførte Ligning og bemærkes, at Ligningen

$$ax' + by' = kab + r$$

tilfredsstilles ved

$$x' = \xi + (m + k)\, b, \qquad y' = \eta - ma,$$

saa ses, at den sidstnævnte Ligning vil faa netop k flere positive Løsninger end den første, nemlig de, som svare til $m = -1, -2 \ldots -k$.

For at afgjøre, om man faar Antallet af positive Løsninger lig $E\frac{r}{ab}$ eller $E\frac{r}{ab} + 1$ behøver man altsaa kun at undersøge om den Ligning, hvor r erstattes ved den mindste positive Rest, som faas ved Division med ab, har 0 eller 1 Løsning i positive hele Tal.

Vi forudsætte altsaa nu $0 < r < ab$. Ligningen maa da, hvis den er mulig, tilfredsstilles ved en Værdi af $x < b$ og af $y < a$, altsaa have en Minimalløsning med baade x og y positive (a og b antages primiske). En anden Minimalløsning kan i dette Tilfælde ikke existere, thi til et negativt x svarer et y, som bliver større end a; og omvendt bliver $x > b$ for y negativ. For at give to Minimalløsninger maatte de til disse svarende x og y faa modsatte Tegn. Heraf sluttes altsaa, at man vil faa 0 eller 1 positiv Løsning, eftersom Ligningen har 2 eller 1 Minimalløsninger.

Denne Sammenhæng giver Undersøgelsen en forøget Interesse, tillige ses, at den ændrede Eulerske Algorithme strax vil give den mindste positive Løsning, hvis denne existerer.

For at faa nøjere Rede paa, hvilke Værdier af r der svare til hvert enkelt Tilfælde, opskrive vi Tallene fra 0 til ab — 1 i b Rækker med a Tal i hver ordnede efter Størrelsen, altsaa saaledes som i hosstaaende Skema for a = 5, b = 7.

~~0~~	1	2	3	4
~~5~~	6	~~7~~	8	9
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~
~~15~~	16	~~17~~	18	~~19~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~
~~30~~	~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~

For at faa de Tal, som give 2 Minimalløsninger, har man af dette Skema at udslette dem, der ere af Formen ax + by. Vi begynde med at udslette hele den første Pille, hvis Tal alle indeholde Faktoren a.

Til disse Tal adderes sukcessive 1 . b, 2 . b, 3 . b ... (a — 1) b, hvorved faas de Tal i de andre Piller, som blive at udslette. Disse Talrækker ville begynde med et Multiplum af b, og dette Tal samt alle de følgende i den paagjældende Pille ville være at udslette. De tilbageblivende Tal ville være de, som ingen

positiv Løsning tilstede, og som svare til kun 1 Minimalløsning.

Da der i hver Pille forekommer et eneste Multiplum af b, og disse Multipla ved Division med a give lutter forskjellige Rester, og da Antallet af tilbageblivende Tal i hver enkelt Pille vil angives ved Udtryk af Formen E $\frac{mb}{a}$, saa ses, at det samlede Antal af disse maa være

$$\frac{1 \cdot b}{a} + \frac{2 \cdot b}{a} + \ldots \frac{(a-1)\,b}{a} - \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \ldots \left(\frac{a-1}{a}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,(a - 1)\cdot(b - 1).$$

Man ser endvidere, at blandt de Tal, som give to Minimalløsninger, ere de laveste Tal op til $a + b - 1$ med Undtagelse af a og b, medens Tallene i Nærheden af ab nødvendig kun give en. Det kan ogsaa let vises, at naar r svarer til 1 Minimalløsning, saa giver $ab - r$ nødvendig 2 og omvendt, saafremt r er primisk med ab.

Om nu en forelagt Værdi af r hører til den ene eller den anden Klasse, vil altsaa bero paa, om den i det anførte Skema staar over eller under det Multiplum af a, som findes i samme Pille. F. Ex. 23 giver ved Division med 5 Resten 3, findes altsaa i 4de Pille. Man har nu at søge det Multiplum af 7 som har Formen $5n + 3$. Dette Multiplum er 28, og da $28 > 23$, giver 23 to Minimalløsninger og ingen Opløsninger i positive Tal.

Et almindeligt Kviterium til strax at afgjøre, om en Ligning hører i den ene eller den anden Klasse, haves saavidt mig bekjendt ikke.

Om singulariteter og deres bestemmelse ved differentialligninger af 1ste orden.

Af Alf Guldberg.

Har man forelagt en differentialligning:

$$F(y', y, x) = 0,$$

saa er opgaven som bekjendt den at finde y udtrykt som en saadan funktion af x, at den indsat i differentialligningen reducerer denne til en identitet. Man har her to væsentlig forskjellige veie at gaa. Man kan enten, hvilket maaske falder naturligst, og som man stedse tidligere gjorde, søge ved specielle transformationer eller substitutioner at reducere ligningen paa kvadratur, eller, hvad man i den senere Tid pleier at gjøre, man kan direkte af differentialligningen søge at udlede de egenskaber, der maa karakterisere den funktion, som den definerer; f. ex. angive de steder, hvor funktionen bliver singulær samt arten af denne singularitet. Det kunde da falde naturligt at klassificere de forskjellige differentialligninger efter deres integralfunktioners singularitet og deres natur. En inddeling efter dette princip vilde være følgende:

1. Differentialligninger, hvis integralfunktion har karakteren af en hel funktion.
2. Differentialligninger, hvis integralfunktion har singulære punkter.
3. Differentialligninger, hvis integralfunktion har singulære kurver.

Ved at integralfunktionen har et singulært punkt forstaaes, at samtlige partikulære integraler for en bestemt værdi af x har en vis singularitet; ved at den har singulære kurver, at de for alle punkter af en vis kurve bliver singulære.

Som exempel paa en differentialligning hørende til 2den klasse kan nævnes:

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = ax.$$

Samtlige partikulære integraler har her et dobbeltpunkt for $x = \pm 1$; dens almindelige integral er nemlig:

$$y = a + C\sqrt{1 - x^2}.$$

Betragter vi derimod differentialligningen:

$$(y - ax^2)\frac{dy}{dx} - 2axy - x\sqrt{(y - ax^2)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2}$$

$$= -\left(2a^2 + \frac{1}{2}\right)x^3,$$

hvis almindelige integral er:

$$y = ax^2 + \sqrt{cx^2 + c^2},$$

saa vil de partikulære integralers singulære punkter ligge paa parablen:

$$y - ax^2 = 0;$$

til et hvilketsomhelst punkt paa denne vil svare et singulært punkt hos et partikulært integral. Havde man saaledes integreret ligningen under betingelsen, at til $x = 0$ skulde svare $y = y_0$, vilde integralets singulære punkter bestemmes ved skjæring mellem parablen:

$$y - ax^2 = 0$$

og de to rette linier:

$$x = \pm\sqrt{-y_0},$$

der giver de to punkter:

$$(+\sqrt{-y_0}, -ay_0) \text{ og } (-\sqrt{-y_0}, -ay_0).$$

Til første klasse hører enhver differentialligning af 1ste orden, hvor differentialkvotienten $\frac{dy}{dx}$ kan udtrykkes som en hel funktion af x og y; thi isaafald bestemmes $\frac{dy}{dx}$ for enhver værdi af x og y entydig af differentialligningen og følgelig har den ved differentialligningen definerede funktion y intet forgreningspunkt ɔ: den har karakteren af en hel funktion.

Den almindelige form for en differentialligning, der hører til 2den klasse, er: *)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + \psi_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + \psi_{m-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi_m = 0, \quad \text{(A)}$$

*) Fuchs: Sitzungsberichte d. k. Preuss. Akad. d. Wissenschaften, 1884, p. 708.

hvor $\psi_1 \ldots \psi_m$ er hele rationale funktioner af y, med af x afhængige koefficienter, af den beskaffenhed, at ψ_k i det høieste er af graden 2k med hensyn paa y.

Den tredie klasse indbefatter enhver differentialligning af 1ste orden, der ikke har en af de ovennævnte former.

Det spørgsmaal fremstiller sig nu, kan man paa forhaand, uden integration, af differentialligningens form angive for differentialligninger af 2den klasse de punkter, for differentialligninger af 3die klasse de kurver, hvor deres integral forgrener sig?

For visse tilfælder er dette mulig; thi, er

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

en rational og hel funktion, hvis høieste potens af $\frac{dy}{dx}$ er n, hvis integral kan skrives under formen:

$$f(a, y, y) = 0,$$

hvor f er en rational og hel funktion og ligeledes af nte grad i a, og betegner vi discriminanten af:

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

med Δ, og discriminanten af:

$$f(a, y, x) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

med Δ_1, saa er: *)

$$\Delta_1 = O . S^3 . D^2$$
$$\Delta = O . S . B^2$$

hvor:

O er omhylningskurven for de partikulære integralkurver,
S det geometriske sted for integralkurvernes spidser,
D det geometriske sted for sammes dobbeltpunkter,
B det geometriske sted for de punkter, hvor to ikke consecutive partikulær kurver berører hinanden.

Dette forudsat, at de partikulære integralkurver kun besad singulariteter af 1ste art ɔ: dobbeltpunkter og spidser.

Besidder de derimod singulariteter af høiere art, saa kan man imidlertid, efter Cayey, betragte disse som equivalent

*) Cayey: Messengers of Mathematics. New Series. Vol. II. pp. 6—12.

med et vist antal dobbeltpunkter, spidser, inflexioner og dobbelttangenter; generaliserer man derfor Cayey's theorem paa dette tilfælde, saa vil, hvis den forekommende singularitet er equivalent med d dobbeltpunkter, s spidser, i inflexioner og t dobbelttangenter, Δ og Δ_1 respective bestaa af:

Δ_1

Omhylningskurven O,
s Spidskurver (S) hver 3 gange,
d Dobbeltpunktkurve (D) hver 2 gange,

Δ

Omhylningskurve O
s Spidskurver (S) hver 1 gang,
Berøringskurve (B) hver 2 gange,

hvoraf vi slutter at det geometriske sted for høiere singulariteter forekommer ialmindelighed i Λ_1 $(2d + 3s)$ gange, i Δ s gange.

Herved er imidlertid at mærke, at forholdet kompliceres, derved at et og samme geometriske sted kan være samtidig omhylningskurve, spidskurve, dobbeltpunktkurve etc., saa man maa underkaste hvert specielt tilfælde en nøiagtig undersøgelse.

Af ovenstaaende udvikling fremgaar, at de i discriminanten Δ optrædende faktorer blive at undersøge enkeltvis, hvorvidt de tilfredsstiller differentialligningen eller ikke. I første tilfælde bliver de at henregne til omhylningskurven, i andet kan de enten være det geometriske sted for de singulære punkter eller at henregne til berøringskurven, hvor de to sidste tilfælder adskilles, derved at for singulær kurven ialmindelighed $\frac{d^2y}{dx^2}$ beregnet af differentialligningen bliver uendelig, for berøringskurven endelig.

Specialiserer vi vort forlangende til differentialligninger af 2den klasse, har vi kun at undersøge faktorer, der indeholder x.

Sløifer vi imidlertid de her gjorte forudsætninger til formen af $F(y', y, 2) = 0$ og dens integral, kommer man ikke mere til saa simple regler. Betragter vi f. ex. differentialligningen:

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0,$$

saa vil ialmindelighed discriminanten $\Delta = B^2 - AC.4$ ikke indeholde nogen omhylningskurve, men just være det geometriske sted for de partikulære integralkurvers spidser.*) En omhylningskurve vilde nemlig forlange for alle dens punkter, at

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \frac{\partial\Delta}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

skulde tilfredsstilles ved $\frac{dy}{dx} = -\frac{B}{2A}$, der fører til

$$2A\frac{\partial\Delta}{\partial x} - B\frac{\partial\Delta}{\partial y} = 0,$$

der ialmindelighed ikke bestaar samtidig med $\Delta = 0$.

Discriminanten Δ vil saaledes ogsaa i dette tilfælde give det geometriske sted for de singulære punkter af integralfunktionen, om man end ikke kan bringe den paa en form som den før angivne. Criteriet for singulær kurven, nemlig at den ikke tilfredsstiller differentialligningen samt gjør $\frac{d^2y}{dx^2}$ uendelig, gjælder som tidligere.

Vi vil til slutning anvende det udviklede paa et par exempler; som første vil vi vælge differentialligningen:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y = 0,$$

hvis discriminant Δ er $= y + x^2$. Differentialligningen tilfredsstilles ikke for $y = -x^2$, fremdeles bliver $\frac{d^2y}{dx^2}$ uendelig for samme; vi slutter altsaa, at parablen $y + x^2 = 0$ er det geometriske sted for integralkurvernes singulære punkter. Dette verificeres ved at betragte ligningens almindelige integral:

$$2x^3 - 3xy + C = 2\sqrt{(y + x^2)^3}.$$

2. Differentialligningen for cycloiden kan, som bekjendt, skrives:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - 2a = 0.$$

Discriminanten Δ bliver:

*) D-

$y = 2a$ tilfredsstiller ligningen, bliver altsaa at henregne til omhylningskurven; hvorimod $y = 0$ ikke tilfredsstiller den, samt gjør $\frac{d^2 y}{dx^2}$ uendelig; altsaa giver $y = 0$ det geometriske sted for de singulære punkter, hvilket, som bekjendt, stemmer.

Et Par Egenskaber ved Talrækkens Tal.

(Af Cand. mag. Niels Nielsen.)

I. Om Logaritmer af hele Tal.

1. For Kortheds Skyld sætter vi:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot p} = S_{np}$$

og

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n.$$

Endvidere vil vi betragte følgende p Summer:

$$S'_p = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p} + \ldots + \frac{1}{np}$$

$$S'_{p-1} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3p-1} + \ldots + \frac{1}{np-1}$$

$$S'_{p-1} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2p-2} + \frac{1}{3p-2} + \ldots + \frac{1}{np-2}$$

. . . .

$$S'_{p-\mu} = \frac{1}{p-\mu} + \frac{1}{2p-\mu} + \frac{1}{3p-\mu} + \ldots + \frac{1}{np-\mu}$$

. . . .

$$S'_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{p+1} = \frac{1}{2p+1} + \ldots + \frac{1}{(n-1)p+1}.$$

2. Af Definitionerne følger umiddelbart:

$$S'_p = \frac{1}{p} S_n, \qquad (1)$$

$$S'_{p-\mu} - S'_p =$$

$$\mu \left(\frac{1}{p(p-\mu)} + \frac{1}{2p(2p-\mu)} + \ldots + \frac{1}{np(np-\mu)} \right) \qquad (2)$$

Sættes i (2) efterhaanden $\mu = 0, 1, 2, 3 \ldots, p - 1$ og adderes de p Ligninger, faas i Følge (1):

$$S_{np} - S_n = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\nu \cdot p(\nu \cdot p - \mu)};$$

altsaa:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{1}{\nu \cdot p(\nu \cdot p - \mu)}. \quad (3)$$

3. Ved Udviklingen af den interessante Ligning i (3) har vi antaget n og p endelige. Ved at betragte $\lim_{n=\infty} (S_{np} - pS'_p)$ ses det let, at (3) ogsaa gælder for n uendelig stor. Ved at sætte $\frac{1}{n}$ uden for Parentes paa venstre Side i (3), lade n voxe uden Grænse og kalde $\frac{1}{n}$ for dx, faas umiddelbart af Definitionen for et bestemt Integral:

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot p}\right] = \int_1^p \frac{dx}{x} = \log p;$$

altsaa faas:

$$\log p = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} \mu \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu \cdot p(\nu \cdot p - \mu)}. \quad (4)$$

For $n = p$ faas af (4) den bekendte Række for log 2. I min »Opgaver i ren matematik« har jeg af Ligningen (3) for $p = 2$, udledt flere Egenskaber ved den saakaldte harmoniske Række.

(1. jan. 88.

II. Om $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$.

1. Man har

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = n;$$

altsaa:

$$\log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \log n.$$

2. Af den bekendte Logarithmerække faas, idet derved forudsættes $x < 1$:

$$\frac{1}{x} - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \ldots + (-1)^p \frac{x^p}{p} + \ldots \quad (1)$$

Af (1) faas da:

$$\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} - \ldots + (-1)^p \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{2^p} + \ldots$$

$$\frac{1}{3} - \log\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^4} - \ldots + (-1)^p \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{3^p} + \ldots \quad (2)$$

. . . .

$$\frac{1}{n-1} - \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n-1)^3}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(n-1)^4} - \ldots + (-1)^p \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(n-1)^p} + \ldots$$

3. Tænker vi os nu n voxende uden Grænse, vil den Dobbeltrække, vi ved Addition faar paa højre Side i (2), have en endelig Sum; ti baade de vertikale og de horizontale Enkeltrækker er ubetinget konvergente. Tænker vi os nu alle Tegnene positive, og summere vi de vertikale Rækker først, faas Summen:

$$\frac{s_2 - 1}{2} + \frac{s_3 - 1}{3} + \frac{s_4 - 1}{4} + \ldots + \frac{s_p - 1}{p} + \ldots \quad (3)$$

hvor $s_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$ in infinitum.

For $p > 1$, haves:

$$\frac{s_{p+1} - 1}{s_p - 1} < \frac{1}{2}.$$

(3) er altsaa konvergent; Dobbeltrækken paa højre Side i (2) har da en endelig Sum, og man faar:

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n\right]$$

$$= \log 2 + \frac{s_2 - 1}{2} - \frac{s_3 - 1}{3} + \ldots + (-1)^p \frac{s_p - 1}{p} + \ldots$$

altsaa: $$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right]$$

$$= \frac{s_2}{2} - \frac{s_3}{3} + \frac{s_4}{4} - \ldots + (-1)^p \frac{s_p}{p} + \ldots \quad (4)$$

I (4) har vi altsaa bevist, at $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$ altid er endelig. Denne Differens kan som bekendt udtrykkes ved $-\Gamma'(1)$, hvilket lettest ses af Gauss's Definition for Gammafunktionen; i (4) har vi altsaa bevist:

$$-\Gamma'(1)=\frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}-\ldots-(-1)^p\frac{s_p}{p}+\ldots \qquad (5)$$

(7. decbr. 90.)

Løste Opgaver.

8. Bestem explicite den mest almindelige lineære Transformation, der omdanner $x^n = A$, hvor A er et komplex Tal, til en anden Ligning af n^{te} Grad med reelle Koefficienter. (C. J.)

Opløsning. Transformationen

$$y = a + \frac{b}{x-c}$$

kan geometrisk defineres paa følgende Maade: paa x-punktet anvendes Parallelforskydningen c, derpaa Inversjon m. H. t. o med 1 med paafølgende Omlægning om X-axen; Drejningen b og Parallelforskydningen a give da sluttelig y.

Rødderne x ligge som Vinkelspidser i en regulær n-kant paa en Cirkel C med Centrum i o. Den søgte Transformation maa nu enten føre alle Rødderne over til reelle Værdier, eller de imaginære maa to og to være konjugerede, hvilket paa den anden Side ogsaa er tilstrækkelige Betingelser.

1°. Alle y-værdier reelle. Da Cirklen C ved Inversjonen skal gaa over til en ret Linje, maa c til Modulus have Cirklens Radius ɔ:

$$c = \sqrt[2n]{A\bar{A}}\,.\,1_{\varphi}. \text{ *)}$$

Efter Inversjonen ligge Rød[illegible] paa en ret Linje, der er

*) Ved Regning med Beliggenhe[illegible] let konjugerede (omlagte) Tal f. Ex. til x ved $\bar{x}$, ligeso[illegible] tilles ved danske Bogstaver.

saaledes beliggende, at Projektiônen af o paa den har Beliggenhedstallet $\frac{1}{2c}$. Drejningen skal gøre Linjen parallel med X-axen, altsaa

$$b = \mathfrak{z} \,.\, 1_{\varphi \pm \frac{\pi}{2}} = \pm i \mathfrak{z} \,.\, 1_{\varphi} = i \mathfrak{r} \, 1_{\varphi}.$$

Projektionen af o paa Linjen er nu $\frac{i \mathfrak{r} 1_{\varphi}}{2c}$.

Man faar da

$$a = q - \frac{i \mathfrak{r} 1_{\varphi}}{2c}.$$

Transformationen er da

$$y = q - \frac{i \mathfrak{r}}{2 \sqrt[2n]{A\bar{A}}} + \frac{i \mathfrak{r} 1_{\varphi}}{x + \sqrt[2n]{A\bar{A}} \,.\, 1_{\varphi}}.$$

2^0. Der findes imaginære Rødder. Da disse efter Transformationen skulle være konjugerede to og to, maa Centrum i den transformerede Cirkel, C′, ligge paa X-axen. Rødderne bestemmes her som Skæringspunkter mellem C′ og n Cirkelbuer gaaende gennem det Punkt p, hvortil o gaar over ved Transformationerne b og a, og det med p konjugerede Punkt p′ m. H. t. C′, idet paa hinanden følgende Buer skære hinanden under Vinklen $\frac{2\pi}{n}$. Fælleskorderne mellem C′ og Cirklerne gennem p og p′ gaa gennem et fast Punkt q. Lad nu a_1 være et Rodpunkt; lad $a_1 q$ skære C′ i a_1', $a_1'\bar{q}$ i a_2, $a_2 p$ i a_2' o. s. v. Hvis n er lige, ville alle de saaledes bestemte Punkter være Rodpunkter, er derimod n ulige, vil kun hvert andet: a_1, a_2, a_3 ... være det. Da der imidlertid ikke existerer mer end n forskellige Rodpunkter, maa for et vist endeligt r a_r være identisk med a_1.

En Betragtning af en Figur viser imidlertid øjeblikkelig, at naar q er forskellig fra $\bar{q}$ er dette umuligt, idet man ved at gennemløbe Punktrækken a_1 a_2 a_3 ... stadig bevæger sig i samme Retning nærmende sig et af Endepunkterne af Korden $q\bar{q}$; q og altsaa ogsaa p maa da ligge paa X-axen.

Heraf ses nu for det første, at a, som fører o over i p, maa være reel = q. Endvidere, da Rødderne paa C′ skulle

være symmetrisk beliggende m. H. t. X-axen, maa x-punkterne ligge symmetrisk m. H. t. Linjen fra o til c, hvoraf ses, at

$$c = \mathfrak{r} . (\pm A)^{\frac{1}{n}} .$$

Naar Inversjonen forbunden med Omlægning er foretagen, skal b dreje Centrum i Cirklen ind paa X-axen ɔ:

$$b = \mathfrak{s} . (\pm A)^{\frac{1}{n}} .$$

Altsaa $$y = \mathfrak{q} + \frac{\mathfrak{s}(\pm A)^{\frac{1}{n}}}{x + \mathfrak{r}(\pm A)^{\frac{1}{n}}} .$$

Denne Ligning løst med Hensyn til x, giver x lig $(\pm A)^{\frac{1}{n}}$ multipliceret med en vilkaarlig, reel lineær Transformation. Det viser sig ogsaa let, at en saadan virkelig tilfredsstiller Fordringerne.

Det kan sluttelig bemærkes, at der ingen Forandring sker i Resultatet, hvis Parallelforskydningen c bringer Cirklen til at gaa gennem Inversjonscentret o; Tilfældet kan enten betragtes som et Grænsetilfælde eller behandles direkte, men bringer intet nyt frem. Kun vil, naar Koefficienterne til x i den reelle Substitution ere ligestore, den fremkomne Ligning være af $(n - 1)^{te}$ Grad, idet en Rod er bleven uendelig stor; den geometriske Forklaring heraf opdages let.

(P. Heegaard.)

Opgave til Løsning.

Man skal bevise, at

$$\lim_{a=\infty} \left(\sum_{0}^{\infty} u_n a^n : \sum_{0}^{\infty} v_n a^n\right) = \lim_{n=\infty} (u_n : v_n),$$

naar højre Side af denne Ligning har en bestemt og endelig Værdi, $\Sigma v_n a^n$ er en stedse konvergent Potensrække med positive Koefficienter, og a er positiv.

(J. L. W. V. Jensen.)